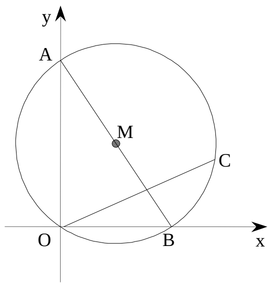
1. חנות קנתה 20 חולצות כותנה ו-60 חולצות פשתן.
המחיר של חוצת פשתן היה נמוך ב-15% מהמחיר של חולצת כותנה.
עבור כל חולצות הפשתן שילמה החנות 2550 שקל.
כמה שקלים שילמה החנות עבור כל חולצות הכותנה

$$20x + 60y$$
$$y = 85\%x = \frac{85}{100}x$$
$$60y = 2550$$

$$y = 42.5$$
$$x = 50$$
$$20x = 1000$$



2. נתון מעגל שמשוואתו $(x-a)^2+(y-6)^2=45$
נתון כי המרכז M של המעגל נמצא ברביע הראשון,
והמעגל עובר דרך ראשית הצירים $O(0,0)$ (ראה ציור)

א. מצא את a.

ב. המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה נוספת B,
ואת ציר ה- y בנקודה נוספת A.
AB הוא קוטר.
דרך O מעבירים אנך ל-AB. האנך חותך את המעגל בנקודה C.

(1) מצא את שיעורי הנקודה B.

(2) מצא את משוואת הישר OC.

(3) מצא את שטח המשולש OCB.

א. מאחר והמעגל עובר בראשית הצירים, הנקודה מקיימת את המעגל ולכן נציב $(0,0)$ במשוואת המעגל ונקבל:

$$(0-a)^2+(0-6)^2=45$$
$$a^2+36=45$$
$$a^2=9$$
$$a=\pm 3$$

מאחר והנקודה נמצאת ברביע הראשון, נבחר את $\boldsymbol{a=+3}$.
ולכן, משוואת המעגל היא:

$$(x-3)^2+(y-6)^2=45$$

ב.

(1) בנקודה B המעגל חותך את ציר ה-x, לכן נציב במשוואה $y=0$.

$$(x-3)^2+(0-6)^2=45$$
$$x^2-6x+9+36=45$$
$$x-6x=0$$
$$x_1=0;x_2=6$$
$$O(0,0);\boldsymbol{B(6,0)}$$

(2) מאחר ו- A נמצאת על ציר ה- y נציב $x=0$ במשוואת המעגל ונקבל:

$$(0-3)^2+(y-6)^2=45$$
$$9+y^2-12y+36=45$$
$$y^2-12y=0$$
$$y_1=0;y_2=12$$

אז כדי לגלות את משוואת הישר נותר לנו לגלות את שיפוע המשיק.
בשביל זה נמצא קודם את השפוע m של AB

$$m_{AB}=\frac{12-0}{0-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

מאחר והישר OC מאונך לישר AB, שיפוע הישר m_{OC} הוא הנגדי ההופכי של השיפוע של AB

ולכן $m_{OC}=-\frac{1}{m_{AB}}=\frac{1}{2}$

כמו שאנחנו יודעים, הישר עובר דרך ראשית הצירים $O(0,0)$ ולכן משוואת הישר OC היא:

$$\boldsymbol{y=\frac{x}{2}}$$

(3) על מנת למצוא את הנקודה C, נשווה בין משוואת הישר OC ומשוואת המעגל.
נציב $y=\frac{x}{2}$ במשוואת המעגל ונקבל

$$(x-3)^2+\left(\frac{1}{2}x-6\right)^2=45$$
$$x^2-6x+9+\frac{1}{4}x^2-6x+36=45$$
$$1.25x^2-12x=0$$
$$x_1=0;x_2$$

נציב את הערך ונקבל $y=\frac{1}{2}(9.6)=4.8$ כעת קיבלנו את ערכי הנקודה $\boldsymbol{C(9.6,4.8)}$

כדי לקבל את שטח המשולש נכפיל את הצלע OB בגובה הנקודה C ונקבל

$$S_{OCB} = \frac{6 \cdot 4.8}{12} = 14.4$$

3. נתונה הפונקציה $y = \frac{2}{x} - x^2$.

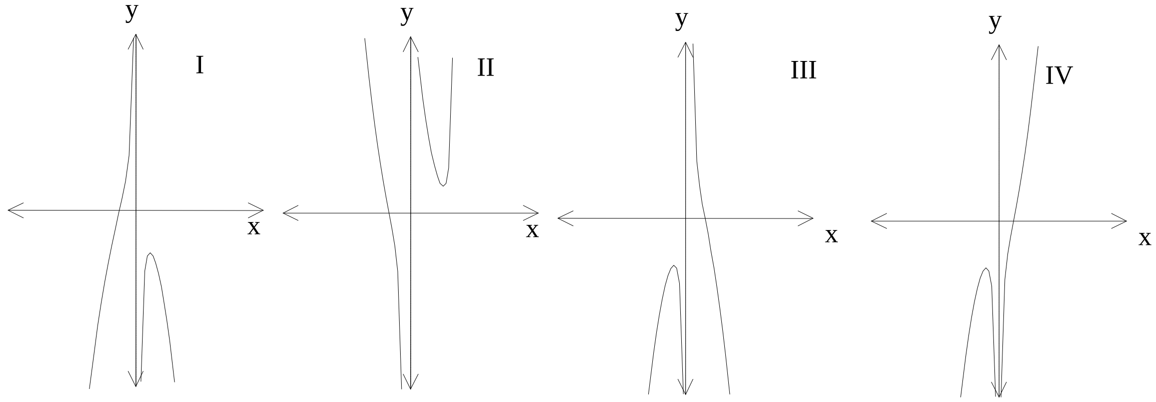
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ג. קבע אם הפונקציה עולה או יורדת עבור $x > 0$ ונמק.

ד. לפניך ארבעה גרפים I, II, III, IV.
איזה מבין הגרפים הוא גרף של הפונקציה הנתונה? נמק

ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה הנתונה עבור $x < 0$.



תשובות:

א. תחום ההגדרה $x \neq 0$

ב. בנקודת הקיצון, שיפוע הפונקציה שווה ל-0. ולכן, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל-0.

$$y' = -\frac{2}{x^2} - 2x$$
$$-\frac{2}{x^2} - 2x = 0 \ \ / \cdot x^2$$
$$-2 - 2x^3 = 0 \ \ / + 2$$
$$-2x^3 = 2 \ \ / \cdot -\frac{1}{2}$$
$$x^3 = -1$$
$$x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

כדי למצוא את ערך ה-y בנקודת הקיצון נציב את ערך ה-x בפונקציה המקורית:

$$y = \frac{2}{-1} - (-1)^2 = -2 - 1 = -3$$

וקיבלנו את ערכי הנקודה $(-1, -3)$

כדי לקבל את סוג הנקודה, נגזור נגזרת שניה

$$y'' = -6x^2 < 0$$

x^2 תמיד חיובית (בתחום ההגדרה) ולכן הנגזרת השניה תמיד שלילית. ולכן הנקודה היא נקודת מקסימום.

דרך נוספת לקבוע את סוג הנקודה היא להציב ערכים בטבלה

x	-2	-1	-0.5	0	1
y'	$+\nearrow$	$0(max)$	$-\searrow$		$-\searrow$

$$y' = \left(-\frac{2}{x^2}\right) - 2x$$
$$y'(-2) = -\frac{2}{(-2)^2} - 2(-2) = -0.5 + 4 = 3.5 > 0$$
$$y'(-1) = \left(-\frac{2}{(-1)^2}\right) - 2x = -2 + 2 = 0$$
$$y'(-0.5) = \left(-\frac{2}{(-0.5)^2}\right) - 2 \cdot (-0.5) = -8 + 1 = -7 < 0$$
$$y'(1) = \left(-\frac{2}{(1)^2}\right) - 2 \cdot 1 = -2 - 2 = -4 < 0$$

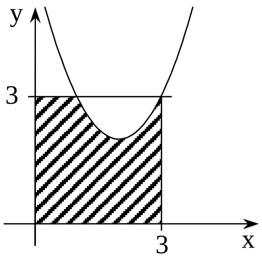
ג. בטבלה למעלה מצאנו כי עבור $x > 0$ הפונקציה יורדת.
אפשר גם להציב בנגזרת

$$y'(1) = \left(-\frac{2}{(1)^2}\right) - 2 \cdot 1 = -2 - 2 = -4 < 0$$

ד. על פי הנתונים הגרף הנכון הוא הגרף III

ה. עליה: $-\infty < x < -1$
ירידה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < \infty$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - ax + 6$, a הוא פרמטר.
אחת מנקודות החיתוך של הישר $y = 3$
עם גרף הפונקציה $f(x)$ היא ב-$x = 3$ (ראה ציור).



א. מצא את הערך של a.

ב. הצב בפונקציה את הערך של a,
ועגה על תת-הסעיפים (1) ו-(2).

(1) מצא את נקודת החיתוך הנוספת
של הישר $y = 3$ עם גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $y = 3$,
על ידי הישר $x = 3$ ועל ידי הצירים.

א.

$f(x) = x^2 - ax + 6$

נתונה לנו נקודה על הישר $x = 3$, $y = 3$. נציב בפונקציה $f(x)$ ונקבל

$3 = 3^2 - 3a + 6$

$3 = 9 + 6 - 3a$

$3 = 15 - 3a$

$3a = 12$

$\boldsymbol{a = 4}$

ב. קיבלנו את ההפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 6$

(1) נציב בפונקציה $y = 3$ ונקבל

$3 = x^2 - 4x + 6$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (3)}}{2 \cdot (1)} = \frac{4 \pm 2}{3}$$

$x_1 = 3; x_2 = 1$

וקיבלנו את נקודת החיתוך השניה $(\mathbf{1, 3})$

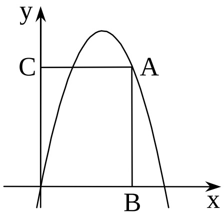
(2) .

$3x|_0^1[3(1)] - [3(0)] = 3$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x|_1^3 = \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{4(3)^2}{2} + 3(3)\right] - \left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{4(1)^2}{2} + 3(1)\right] = 4\tfrac{2}{3}$$

$$S = 3 + 4\,\tfrac{2}{3} = 7\,\tfrac{2}{3}$$

5. נקודה A שברביע הראשון נמצאת על
גרף הפונקציה $y=-x^2+5x$.
מנקודה A מורידים אנכים לצירים,
ונוצר מלבן $ABOC$. O היא ראשות הצירים
(ראה ציור).



א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A
כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מצא את ההיקף המקסימלי של המלבן.

א. פונקציית המטרה שלנו היא מקסימום של היקף המלבן כאשר x רוחבו ו-y גובהו.
אז הפונקציה שלנו היא : $f: 2x+2y$ כאשר $y=-2x^2+5x$

$$f(x)=2x+2(-2x^2+5x)$$
$$f(x)=2x-4x^2+10x$$
$$f(x)=-2x^2+12x$$

נגזור ונשווה ל-0 :

נציב בפונקציה ונקבל

$$y=-(3)^2+5(3)=-9+15=6$$

וקיבלנו את הנקודה A(3,6)

ב. כעת נחשב את היקף המלבן,

$$P=2\cdot 3+2\cdot 6=6+12=18$$

6. נתונה הפונקציה $y=-12\sqrt{x}+6x$

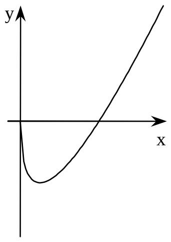
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב.

(1) מצא את השיעורים של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה.

(2) קבע את סוגה של נקודת הקיצון שמצאת. פרט את חישוביך.

ג. בהסתמך על תשובותיך לסעיף ב', קבע אם נקודה ששיעור ה-y שלה הוא -7, נמצאת על גרף הפונקציה. נמק.



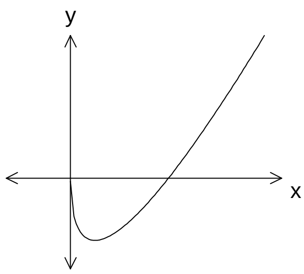
א. תחום בבגדרה של הפונקציה הוא כאשר מה שנמצא בתוך השורש גדול או שווה ל-0.
לכן תחום ההגדרה הוא $x\geq 0$

ב.

(1) נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0.

$$y'=-\frac{12}{2\sqrt{x}}+6$$

$$\frac{-12}{2\sqrt{x}}+6=0\ \ /\cdot 2\sqrt{2}$$
$$-12+12\sqrt{x}=0$$
$$12\sqrt{x}=12$$
$$\sqrt{x}=1$$
$$\boldsymbol{x=1}$$



נציב בפונקציה ונקבל:

$$y=-12\sqrt{1}+6\cdot 1=-12+6=-6$$

(2) נגזור נגזרת שניה כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון

$$y''=\frac{12}{2\sqrt{x}}$$

נציב בנגזרת השניה $x=1$ ונקבל

$$y''=\frac{12}{2\sqrt{1}}=6>0$$

ניתן גם להשתמש בטבלה:

x	0	0.5	1	2
y'		$-\searrow$	0	$+\nearrow$

או שנסתמך על הסרטוט ונקבע כי הנקודה היא נקודת מינימום.

ג. מאחר ערך ה-y בנקודת המינימום המוחלט הוא $y=-6$, נקודה שערך ה-y שלה הוא 7 לא יכולה להיות על גרף הפונקציה.