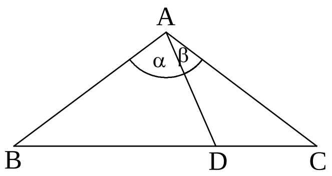
1. במשולש שווה-שוקיים $\triangle ABC$ $(AB = AC)$

D היא נקודה על הבסיס BC.

נתון: $\sphericalangle BAD = \alpha, \sphericalangle CAD = \beta$ (ראה ציור).

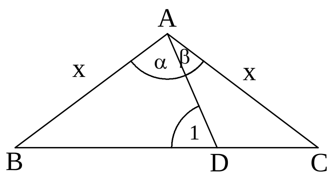


א. הוכח $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

ב. נתון: $\frac{BD}{DC} = 2$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$

חשב את α.

א. נסמן $AB = AC = x$.



משפט הסינוסים ב- $\triangle ABD$:

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\sphericalangle D_1}$$

משפט הסינוסים ב- $\triangle ADC$:

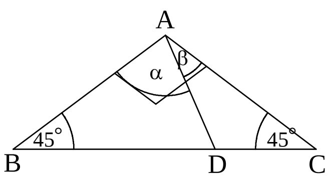
$$\frac{DC}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin(180^\circ - \sphericalangle D_1)}$$

$$\sin(180^\circ - \sphericalangle D_1) = \sin\sphericalangle D_1$$

לכן $\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\sphericalangle D_1}$

כלומר: $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

ב. על פי הנתון זוויות המשולש הן: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.



כלומר: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$\beta = 90^\circ - \alpha$

כמו כן נתון: $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2$

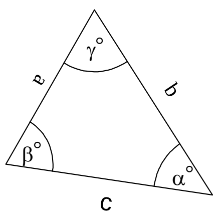
$\frac{\sin\alpha}{\cos a} = 2$

לכן: $\tan\alpha = 2$

$\alpha = 63.43^\circ$

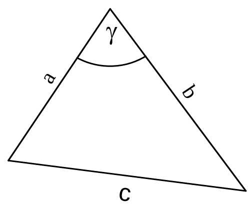
תזכורת

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

משפט הקוסינוס



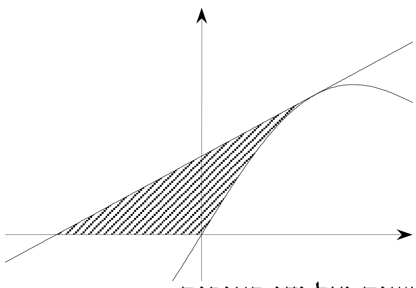
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

2. נתונה הפונקציה $f(x)=x+a\sin x$

בתחום $0\le x\le \pi$, $a>0$.

לגרף הפונקציה העבירו משיק ששיפועו 1

(ראה ציור).



א. (1) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה

הבע באמצעות a במידת הצורך.

(2) הבע באמצעות a את משוואת המשיק.

ב. (1) נתון כי השטח ברביע השני, המוגבל על ידי המשיק ועל ידי הצירים,

הוא 2 (החלק הקווקו בציור). חשב את הערך של a .

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר ה- x .

(כל השטח המקווקו בציור).

א. (1)את הנגזרת ל 1 נשווה :

תזכורת

$$\cos'(u)=-u'\sin(u)$$
$$\sin'(u)=u'\cos(u)$$

$$f'(x)=1+a\cos x=1$$
$$a\cos x=0$$
$$\cos x=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}$$
$$y=\frac{\pi}{2}+a\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+a$$

וכך קיבלנו את הנקודה $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+a\right)$

(2)

$$y=mx+n$$
$$\frac{\pi}{2}+a=1\cdot\frac{\pi}{2}+n$$
$$a=n$$
$$y=x+a$$

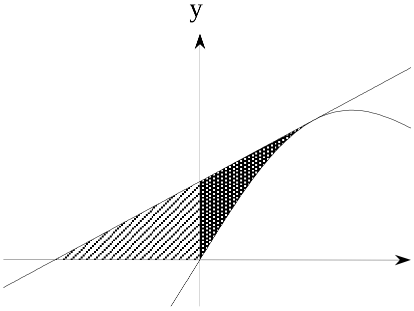
ב. (1) המשיק חותך את הצירים בנקודות : $(-a,0),(0,a)$

$$S_{\triangle}=\frac{a\cdot a}{2}=\frac{a^2}{2}$$

נתון : $\frac{a^2}{2}=2$

$$a^2=4 \begin{cases} a_1=2 \\ \cancel{a_2=-2} \end{cases}$$

$$a=2$$



(2) נחשב את השטח הנוסף (מלבד המשולש) :

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x+2-\left(x+2\sin x\right)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2-2\sin x\right]dx=\left[2x+2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\cdot 0+2\cos 0\right)=\pi-2$$

אם כך, השטח הכולל יהיה סכום שני השטחים.

$$S=\pi-2+2=\pi$$

תזכורת

$$\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

$$\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$$

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

לקבוע נצמיד x

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x+3}{x-2}$.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(2) מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה). נמק.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. מעבירים שני משיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ המקבילים זה לזה

נקודת ההשקה של משיק אחד היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y.

מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה של המשיק האחר.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)+C$

האסימפטוטה האופקית של $g(x)$ היא $y=4.5$.

מצא את הערך של C.

א. (1) אסימפטוטה אופקית: $y=3$

אסימפטוטה אנכית: $x=2$

(2) חיתוך עם ציר x:

$$\frac{3x+3}{x-2}=0$$
$$3x+3=0$$
$$3x=-3$$
$$x=-1$$
$$(-1,0)$$

חיתוך עם ציר y:

$$y(0)=\frac{3(0)+3}{0-2}=-\frac{3}{2}$$
$$(0,-1.5)$$

(3) על מנת לבדוק תחומי עלייה וירידה יש למצוא נקודות קיצון:

לחישוב נקודות הקיצון נגזור ונשווה את הנגזרת לאפס:

נגזרת מנה:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$u=3x+3 \quad v=x-2$

$u'=3 \quad v'=1$

$$y'=\frac{3(x-2)-(3x+3)}{(x-2)^2}=\frac{\cancel{3x}-6\cancel{-3x}-3}{(x-2)^2}=\frac{-9}{(x-2)^2}=0$$

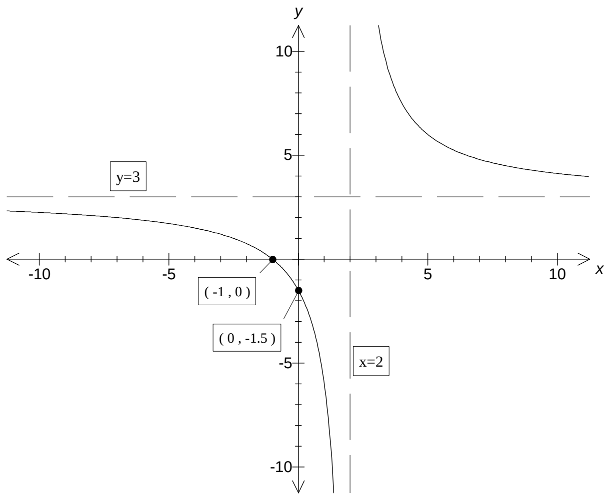
אין פתרון למשוואה לכן אין נקודות קיצון.

הנגזרת שלילית לכל $x\neq 2$, ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה:

ירידה: $x\neq 2$.

עליה: אין.

(4)



ב.

$$m = y'(0) = \frac{-9}{(x-2)^2} = -\frac{9}{4}$$

$$\frac{-9}{(x-2)^2} = -\frac{9}{4}$$

$$(x-2)^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 4$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4$$

שיעור ה- x של הנקודה האחרת הוא 4 .

ג. $g(x) = f(x) + C = \frac{3x+3}{x-2} + C$

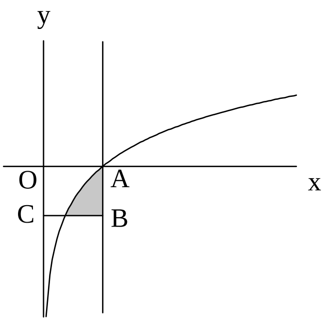
האסימפטוטה האופקית של $g(x)$:

$$\frac{3}{1} + C = 4.5$$

$$C = 1.5$$

4. א. מצא את הנגזרת של הפונקציה $y = x\ln x$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \ln x$.



ברביע הרביעי בנו ריבוע OABC

ששתיים מצלעותיו מונחות על הצירים.

הקודקוד A הוא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (ראה ציור).

(1) מצא את משוואת הצלע BC.

(2) היעזר בסעיף א', וחשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצלעות של הריבוע שאינן מונחות על הצירים (השטח המקווקו בציור).

א. נגזור על פי כלל המכפלה:

$$u = x\ ,\ v = \ell nx \Leftarrow (uv)' = u'v + uv'$$

$$u' = 1\ ,\ v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

ב. נמצא את נקודה A:

$$\ln x = 0$$

$$\log_e x = 0$$

$$x = e^0 = 1$$

$$A(1,0)$$

(1) מכיוון ש- OABC▫ ריבוע, משוואת BC היא $y = -1$.

(2) נמצא את נקודת החיתוך של BC עם גרף הפונקציה:

$$\ln x = 1$$

$$\log_e x = -1$$

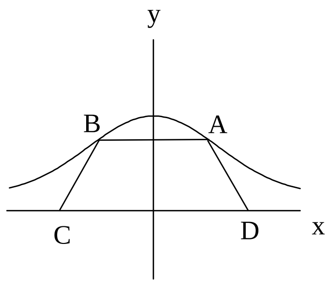
$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

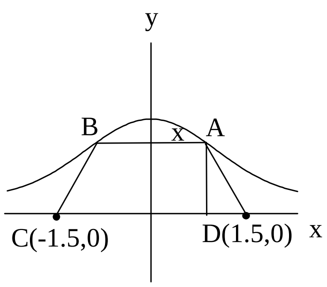
$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[\ln x - (-1)\right]dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[\ln x + 1\right]dx = \left[x\ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} =$$

$$= (1\cdot\ln 1) - \left(\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

5. נתונה הפונקציה $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$

A ו- B הן נקודות על גרף הפונקציה
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x.
חיברו את הנקודות A ו- B עם הנקודות
$C(-1.5,0)$ ו- $D(1.5,0)$
בהתאמה (ראה ציור).
מצא את שיעור ה- x של הנקודה A,
שעבורו שטח המרובע ABCD הוא מקסימלי.





$A\left(x,e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$

$AB=2x$

$CD=3$

$H=e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$S=\frac{(AB+CD)\cdot H}{2}$

$f(x)=\frac{(2x+3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2}=(x+1.5)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

נגזור ע"פ כלל המכפלה:

$u=(x+1.5)\ ,\ v=e^{-\frac{1}{2}x^2}\ \Leftarrow (uv)'=u'v+uv'$

$u'=1\ ,\ v'=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

נגזרת של פונקציה מעריכית
$(e^u)'=u'e^u$

$f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}+(x+1.5)\cdot(-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}=$

$=e^{-\frac{1}{2}x^2}(1-x^2-1.5x)=0$

$-x^2-1.5x+1=0$

$x_1=\frac{1}{2};x_2=-2$

A ברביע הראשון ולכן $x=\frac{1}{2}$.