תשובות מבחן במתמטיקה שאלון 006 :

תשובה לשאלה 1 שאלון 006 תשס"ט:

סעיף א:

נבנה טבלה מהירות-זמן-דרך :

#	זמן	מהירות	דרך (מרחק)
רוכב ראשון	T	V+m	45
רוכב שני	T-1	V	20

- נשים-לב שהרוכב השני יצא באיחור של שעה לכן הוא נסע שעה אחת פחות כמו שציינו בטבלה.
- אם הרוכב השני היה במרחק של 25 ק"מ מהעיר, זה אומר שהוא נסע 20 ק"מ עד עכשיו.

כעת נעבור מהטבלה לחישוב המפורט.

אנחנו רואים שיש לנו 2 נעלמים. נוציא מהטבלה 2 נוסחאות, כאשר אנו יודעים שזמן כפול מהירות שווה דרך :

(א) $\mathrm{T}(\mathrm{V}+\mathrm{m})=45$

(ב) $(T-1)V=20$

עכשיו, מכיוון שאנו מחפשים את V, אזי נחלץ את T ממשוואה א' ונציב את T שמצאנו במשוואה א.

$$T(V+m)=45 \quad \rightarrow \quad T=\frac{45}{V+m}$$

כעת, כאמור, נציב את T במשוואה ב' ונחלץ את V שאותו אנחנו מחפשים.

$$(T-1)V=20 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{45}{V+m}-1\right)V=20 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{45}{V+m}-\frac{V+m}{V+m}\right)V=20 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left(\frac{45-V-m}{V+m}\right)V=20 \quad \rightarrow \quad \frac{45V-V^2-mV}{V+m}=20 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad 45V - V^2 - mV = 20V + 20m \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad V^2 + V(-25+m) + 20m$

קיבלנו משוואה ריבועית. הבה נמצא את שורשי המשוואה:

$$V_{1,2} = \frac{25 - m \mp \sqrt{(25-m)^2 - 4 \cdot 20m}}{2} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}} \quad , \quad \boldsymbol{V_2 = \frac{25 - m - \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2}}$$

<u>סעיף ב:</u>

נסמן $X_1 = V_1$, ונסמן $X_2 = V_2$.

$|X_1 - X_2| < 11$

משום שמדובר על ערך מוחלט, נחלק לשני מקרים ונבדוק:

$0 < X_1 - X_2 < 11$ וגם $0 < X_2 - X_1 < 11$

אבל, אנחנו יודעים ששורש הוא ביטוי חיובי, וב X_1 יש תוספת של השורש וב X_2 יש חיסור שלו.

לכן נבדוק רק את המקרה שיתכן: $0 < X_1 - X_2 < 11$ ללא צורך בבדיקת גדול מאפס - כי הבנו שמדובר על ביטוי חיובי.

$$\frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} - \frac{25 - m - \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} < 11 \quad \rightarrow$$

$$\frac{25 - m + \sqrt{m^2 - 130m + 625} - 25 + m + \sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} < 11 \quad \rightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{m^2 - 130m + 625}}{2} < 11 \quad \rightarrow \quad \sqrt{m^2 - 130m + 625} < 11 \quad \rightarrow$$

$$m^2 - 130m + 625 < 121 \quad \rightarrow \quad m^2 - 130m + 504 < 0$$

הערה:

נשים-לב, לפני שנמשיך, שנתון כי m בין 0 ל- 5, כלומר הביטוי בשורש בהכרח חיובי. לא נצטרך לדרוש שהביטוי יהיה גדול מאפס, בדיוק משום הנתון שעליו עכשיו הסברנו.

הבה נמשיך:

$m^2 - 130m + 504 < 0$

נבדוק מהן שורשי המשוואה הנתונה, ונזכור שאנו שואלים מתי היא קטנה מאפס (פרבולה מחייכת):

$$m_{1,2} = \frac{130 \mp \sqrt{16900 - 2016}}{2} = \frac{130 \mp 122}{2} =$$

שתי תשובות אפשריות, האחת 126 והשניה 4. כלומר, קיבלנו: $4 < m < 126$

נזכור את הנתון: $0 < m < 5$ וביחד נקבל את התשובה המיוחלת:

$\mathbf{4} < m < 5$

שאלה 2:

א.

$1^2-3^2=4a+2b\rightarrow 4a+2a=-8$

$1^2-3^2+5^2-7^2=16a+4b\rightarrow 16a+4b=-32$

$8a+4b=-16$

$16a+4b=-32$

$8a=-16$

$a=-2$

נמצא את b:

$-16+4b=-16$

$4b=0$

$b=0$

ב.

צ״ל שהטענה נכונה עבור n+2:

$$\underbrace{1^2-3^2+\cdots\cdots-(2n-1)^2}+(2n+1)^2-(2n+3)^2=-2(n+2)^2$$

$-2n^2+(2n+1)^2-(2n+3)^2=-2n^2-8n-8$

$-2n^2+4n^2+4n+1-4n^2-12n-9=-2n^2-8n-8$

$-2n^2-8n-8=-2n^2-8n-8$

הטענה נכונה עבור n טבעי זוגי

ג. $1^2-3^2+5^2-7^2\cdots\cdots-(c-2)^2=1921-c^2$

נבודד את n על מנת לקבל משוואה 1:

$2n-1=c-2$

$2n=c-1$

$n=\dfrac{c-1}{2}$

משוואה 2:

$-2n^2=1921-c^2$

$-2\dfrac{c^2-2c+1}{4}=1921-c^2$

$-2c^2+4c-2=7684-4c^2$

$2c^2+4c-7686=0$

$c=-63$ $\qquad$ $c=61$

התשובה היא $c=61$ משום שרוצים את המספרים הטבעיים בלבד.

שאלה 3 :

$$f(x) = x - \frac{Sin(2x)}{2}$$

א.

צ"ל : $f'(x) = 2Sin^2 X$

$$f'(x) = 1 - \frac{Cos(2x)\cdot 2}{2}$$
$$= 1 - Cos(2x)$$
$$= 2Sin^2 x$$

ב. (1) הנגזרת תמיד חיובית או אפס לכן היא רק עולה, ואין נקודות קיצון.

(2) לפונקציה יש נקודות פיתול, הנגזרת עשויה להתאפס אבל היא חיובית אבל היא חיובית לפני וגם אחרי הנקודה הזו ולכן היא פיתול.

פתרון נוסף :

הנגזרת עשויה להתאפס ואמרנו שאין קיצון לכן הנקודות הללו הינן קיצון.

ג.

$$0 \le Sin^2 x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x + Sin^2 x - x\right)dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} Sin^2 x = \frac{1}{2}}\left[x - \frac{Sin(2x)}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\frac{\pi}{2} - 0 - (-\frac{\pi}{2} - 0) = \pi$$

שאלה 4:

א.

$f'(x)$ הוא גרף I. רואים שבנקודת קיצון של $f'(x)$, $f''(x)$ שווה לאפס.

כמו כן כאשר $f'(x)$ יורדת אזי $f''(x)<0$.

$f''(x)$ הוא גרף II.

ב.

נקודות הקיצון של $f(x)$ הם כאשר $f'(x)$ מתאפסת ו- $f''(x)\neq 0$ בנקודות אלו. ולכן, $x=0$ היא נקודת מינימום מעבר ממינוס לפלוס ו- $x=-1$ היא נקודת מקסימום מעבר מפלוס למינוס של $f'(x)$.

ג.

נקודת פיתול של $f(x)$ היא כאשר $f''(x)=0$ ויש מעבר של סימן של $f''(x)$ ולכן $x=0.4$, $x=1$ ו- $x=-0.6$.

ד.

שטח מקווקו:

$$S=\int_0^{0.4} f''(x)dx = f'(x)\Big|_0^{0.4} = f'(0.4)-f'(0)=f'(0.4)$$

שטח מנוקד:

$$S=-\int_{0.4}^{1} f''(x)dx = -f'(x)\Big|_{0.4}^{1} = -f'(1)+f'(0.4)=0+f(0.4)=f(0.4)$$

השטחים שווים.

<u>פתרון מלא לשאלה 5 בשאלון 006, תשס"ט:</u>

<u>סעיף א:</u>

מקצוע בסיס הפרימידה הוא X כנתון בשאלה.

הצלע a שווה בדיוק לסכום של צלע הריבוע (הקטן, בסיס הפרמידה) ופעמיים גובה משולש שווה-שוקיים. נסמן את גובה המשולש שווה השוקיים בתור h כלומר :

$$x + 2h = a \quad \rightarrow \quad 2h = a - x \quad \rightarrow \quad h = \frac{a-x}{2}$$

כעת, נסתכל על הפירמידה. נוריד גובה מקודקוד הפירמידה לבסיס הפירמידה, נסמן אותו ב- H.

הגובה יורד בדיוק למרכז הבסיס.

לכן, ניתן להבחין במשולש ישר-זווית הבנוי מצלע אחת בבסיס הפירמידה שאורכה $\frac{x}{2}$, וצלע נוספת שהיא הגובה במשולש-שווה השוקיים h, וצלע נוספת שהיא גובה הפירמידה H.

כאמור, מדובר במשולש-ישר-זווית. נוכל למצוא את H בעזרת משפט פיתגורס :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + H^2 = h^2$$

נציב במשוואה הזו את h שמצאנו קודם, ונחלץ את H :

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + H^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + H^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2}{4} \quad \rightarrow$$

$$H^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \quad \rightarrow \quad H^2 = \frac{a^2 - 2ax}{4} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{H = \frac{\sqrt{a^2 - 2ax}}{2}}$$

נא-לשים לב :

יתכנו צורות ביטוי אחרות (בתשובות סופיות במקומות אחרים) אך כולם הן **אותו ביטוי**.

<u>סעיף ב:</u>

אנחנו זקוקים לנוסחאת נפח פירמידה שישנה בדף הנוסחאות.

נפח הפירמידה הינו מכפלת שטח הבסיס בגובה הפירמידה, חלקי 2.

שטח הבסיס הינו שטח הריבוע x^2 . את גובה הפירמידה סימנו ב- H.

כעת, נבנה את הפונקציה שתבטא לנו את נפח הפירמידה (שוב, ע"י הנוסחה הקיימת כבר בדף הנוסחאות) :

$$S(x) = \frac{x^2 \cdot H}{3}$$

כעת, נציב את H שמצאנו בסעיף קודם, מבוטא ע"י x ו- h .

$$S(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 2ax}}{2}}{3} = \frac{x^2\sqrt{a^2 - 2ax}}{6}$$

כעת, נגזור הפונקציה, כדי למצוא את נקודת המקסימום :

$$S'(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(2x\sqrt{a^2 - 2ax} + \frac{-2ax^2}{2\sqrt{a^2 - 2ax}}\right) \quad \rightarrow$$

$$S'(x)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2x(a^2-2ax)}{\sqrt{a^2-2ax}}+\frac{-ax^2}{\sqrt{a^2-2ax}}\right)\quad\rightarrow$$
$$S'(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2x(a^2-2ax)-ax^2}{\sqrt{a^2-2ax}}\quad\rightarrow$$
$$S'(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2a^2x-4ax^2-ax^2}{\sqrt{a^2-2ax}}\quad\rightarrow$$
$$S'(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{x(-5ax+2a^2)}{\sqrt{a^2-2ax}}$$

נשווה את הנגזרת ל- 0, כהרגלנו במציאת קיצון:

$$S'(x)=0\quad\rightarrow\qquad x(-5ax+2a^2)=0$$

תשובה ראשונה x=0 לא תיתכן (בין היתר, לא בתחום ההגדרה הנתון בשאלה).

תשובה שניה:

$$-5ax+2a^2=0\quad\rightarrow\quad 5ax=2a^2\quad\rightarrow\quad \boldsymbol{x=\frac{2a}{5}=0.4a}$$

נשים לב שהמכנה בנגזרת הוא בהכרח חיובי. נשים לב שהמונה בנגזרת מתאפס בנקודת הקיצון שמצאנו. לכן במציאת נגזרת שניה (לצורך הוכחת היות הקיצון מינימום), נוכל לבדוק רק מה סימן נגזרת המונה בלבד.

נסמן ב- U את המונה וב- V את המכנה.

$$\mathrm{S}''(\mathrm{x})=\frac{U'V-V'U}{V^2}$$

ברור לנו ש $U=0$ משום שמדובר על בדיקת קיצון שמאפסת מונה הנגזרת.

גם זה ברור $\mathrm{V}^2>0$. $\mathrm{V}>0$ משום ששורש הוא מספר חיובי. לכן נותר לבדוק רק את נגזרת המונה, ולהציב בה את הקיצון:

$$U'=-10ax+2a^2$$

נציב $x=0.4a$ ונקבל:

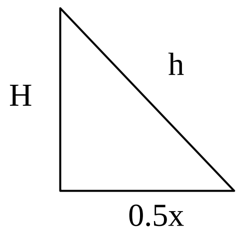
$$-10a(0.4a)+2a^2=-4a^2+2a^2=-2a^2<0$$

כלומר - הוכחנו שהקיצון שמצאנו היא נקודת מינימום.

(נשים-לב שנתבקשנו למצוא את אורך המקצוע של בסיס הפירמידה בכדי שנפחה יהיה מקסימאלי, ולא נתבקשנו למצוא את הנפח עצמו.)

<u>סעיף ג:</u>

הזווית בין פאה צדדית לבין בסיס הפירמידה הינה הזוית בין הצלע שגודלה $\frac{x}{2}$ והצלע h מהמשולש שתיארנו בסעיף א. במשולש הזה היתה הצלע השלישית הגובה של הפירמידה H.



נסמן את הזווית המבוקשת ב- α (מסומנת גם בציור) ונחשבה בעזרת tg:

$$tg(\alpha)=\frac{H}{0.5x}$$

נמצא את H כאשר הנפח מקסימאלי (נציב את x מסעיף קודם):

$$H=\frac{\sqrt{a^2-2ax}}{2}=\frac{\sqrt{a^2-2a\cdot 0.4a}}{2}=\frac{\sqrt{0.2a^2}}{2}=\frac{\sqrt{0.2}}{2}a$$

נציב את H ו- X במשוואת ה- tg ונמצא הזווית:

$$tg(\alpha)=\frac{H}{0.5x}=\frac{\frac{\sqrt{0.2}}{2}a}{0.5\cdot 0.4a}=1.118 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha=48.19^\circ}$$