1. שני צינורות, צינור I וצינור II, ממלאים יחד במים את כל הנפח של בריכה במשך 6 שעות (קצב זרימת המים בשני הצינורות נשאר קבוע)
יום אחד, צינור I מילא לבדו רבע מנפח הבריכה, וצינור II מילא רבע מהבריכה, וכך התמלא חצי מנפח הבריכה במשך m שעות.

א.
(1) הבע באמצעות m את הזמן הדרוש לצינור I למלא את כל נפח הבריכה לבדו.
(2) מצא עבור איזה ערך של m יש פיתרון אחד לבעיה.

ב. נתון כי כאשר כמות המים בבריכה היא 70% מנפח הבריכה, צינור I ממלא לבדו את נפח הבריכה הנותר במשך 3 שעות.
מצא את m במקרה זה.

א. $x=?$ הזמן בו לוקח לצינור I למלא בריכה לבד
$y=?$ הזמן בו לוקח לצינור II למלא בריכה לבד
$\frac{1}{x}$ – הספק של צינור I, $\frac{1}{y}$ – הספק של צינור II

צינור	זמן [שעות]	הספק	עבודה [בריכה]
$I+II$		$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$	1
I	$\frac{1}{4}\div\frac{1}{x}=\frac{x}{4}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{4}$
II	$\frac{1}{4}\div\frac{1}{x}=\frac{x}{4}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=1 \ / \cdot xy \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{x}=m \ / \cdot 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y+6x=xy \\ x+y=4m \ / \cdot 6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y+6x=xy \\ 6x+6y=24m\end{cases}$$

$$xy=24m$$
$$y=\frac{24m}{x}$$

$$x+\frac{24m}{x}=4m$$
$$x^2-4\text{mx}+24\text{m}=0$$
$$\Delta=16m^2-4\cdot 24m=16m^2-96m=16(m^2-6)$$

$$(1)\ x_{1,2}=\frac{4m\pm\sqrt{16(m^2-6m)}}{2}=\frac{4m\pm 4\sqrt{(m^2-6m)}}{2}=\boldsymbol{2m\pm 2\sqrt{(m^2-6m)}}$$

כדי למצוא את הפתרון ל-(2) נשווה $\Delta=0$

$$(2)\ m^2-6m=0\Rightarrow \boldsymbol{m=6}$$

עבודה	הספק	זמן	ב. צינור
0.3	$\frac{1}{x}$	3	I

$$0.3 = 3 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.3} = 10 = x$$

$$2m \pm 2\sqrt{m^2 - 6m} = 10$$
$$\pm 2\sqrt{m^2 - 6m} = 10 - 2m \quad /(\quad)^2$$
$$4(m^2 - 6m) = 100 - 40m + 4m^2$$
$$4m^2 - 24m = 100 - 40m + 4m^2$$
$$16m = 100$$
$$m = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = \mathbf{6\frac{1}{4} = m}$$

.2

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 4n = 2^{-4n}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 8n$$

ב. בהסתמך על סעיף א', מצא את הערך של b במשוואה:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 199}{202\cdot 204\cdot 206\cdot \ldots \cdot 400} = 2^{-b}$$

א.

(1) נבדוק עבור $n=1$:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \overset{?}{=} 2^{-4}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8$$
$$24 = 24$$

(2) נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 4k = 2^{-4k}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 8k$$

(3) נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$:

$$\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 4k\cdot}(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) \overset{?}{=}$$
$$\overset{?}{=} 2^{-4}\cancel{\cdot 2^{-4k}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 8k\cdot}(8k+2)(8k+4)(8k+6)(8k+8)$$

צמצמנו לפי הנחת האינדוקציה (2)

$$(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4) \overset{?}{=} 2^{-4}(8k+2)(8k+4)(8k+6)(8k+8) =$$
$$= 2^{-4}\cdot[2(4k+1)][2(4k+2)][2(4k+3)][2(4k+4)]$$
$$= 2^{-4}\cdot 2^{4}(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)$$
$$\cancel{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = 2^{0}\cdot\cancel{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}$$
$$1 = 1$$

לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

ב. $b=?$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 199}{202\cdot 204\cdot 206\cdot \ldots \cdot 400} = 2^{-b}$$

$$400 = 8n \Rightarrow n = 50$$

נציב $n=50$ בסעיף א' ונקבל:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 200 = 2^{-200}\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 400$$

$$\frac{1\cancel{\cdot 2}\cdot 3\cancel{\cdot 4}\cdot \ldots \cdot 199\cdot 200}{\cancel{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 200\cdot}202\cdot 204\cdot \ldots \cdot 400} \overset{\text{לפי סעיף א'}}{=} 2^{-200}$$

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 199}{202\cdot 204\cdot \ldots \cdot 400} = 2^{-200}$$

b = 200

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-b)^2}{x^2-4}$, $b>2$.

א. מצא (הבא באמצעות b במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.

(2) את השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. על פי הסקיצה של גרף הפונקציה, מצא את התחום שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית וגם פונקציית הנגזרת השניה $f''(x)$ שלילית, אם ידוע כי ל-$f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. נמק.

א. .

(1) תחום ההגדרה:

$$x^2-4\neq 0$$
$$(x-2)(x+2)\neq 0$$
$$x\neq \pm 2$$

$$f(x)=\frac{x^2-2bx+b^2}{x^2-4}$$

אסימפטוטות:

$$y=1, x\pm 2$$

(2) נשווה את $f(x)=0$

$$\frac{(x-b)^2}{x^2-4}=0$$
$$(x-b)^2=0$$

נקודת חיתוך עם ציר y, $(b,0)$

נקודות חיתוך עם ציר x

$$f(0)=\frac{(-b)^2}{-4}=-\frac{b^2}{4}$$

וקיבלנו את $\left(0,-\frac{b^2}{4}\right)$

(3) נגזור את הפונקציה

$$f'(x)=\frac{2(x-b)(x^2-4)-2x(x-b)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{2(x-b)[x^2-4-x(x-b)]}{(x^2-4)^2}=$$
$$=\frac{2(x-b)(x^2-4-x^2+xb)}{(x^2-4)^2}$$

נשווה ל-0

$$f'(x)=\frac{2(x-b)(xb-4)}{(x^2-4)^2}=0$$
$$x_1=b; x_2=\frac{4}{b}$$
$$f'(x)=\frac{2(bx^2-4x-b^{2x}+4b)}{(x^2-4)^2}$$

הערות: $b>2; 0<\frac{4}{b}<2; 4<b^2$

נגזור נגזרת שניה את המונה בלבד

$$f''(x)=4bx-8-2b^2$$

נציב $b=3$ בשביל ההצבה בטבלה

x	-4	-2	0	$\frac{4}{b}\left(\frac{4}{3}\right)$	$\frac{2+\frac{4}{b}}{2}\left(\frac{5}{3}\right)$	2	$\frac{2+b}{2}\left(\frac{5}{2}\right)$	$b\ (3)$	$2b\ (6)$
$f'(x)$	$+$ ↗		$+$ ↗	0 max	$-$ ↘		$-$ ↘	0 min	$+$ ↗

$$f''\left(\frac{4}{b}\right)=4\cancel{b}\cdot\frac{4}{\cancel{b}}-8-2b^2=16-8-2b^2=8-\underbrace{2b^2}_{>8}<0\ (max)$$

$$f''(b)=4b-4-b^2=\underbrace{3b^2}_{>6}-4>0\ (min)$$

נגזור (את המונה בלבד)

$$f'(0)=2(-b)(-4)=8b>0$$

$$f'(2b)=2(2b-b)(2b^2-4)=2b\left(\underbrace{2b^2}_{>4}-4\right)>0$$

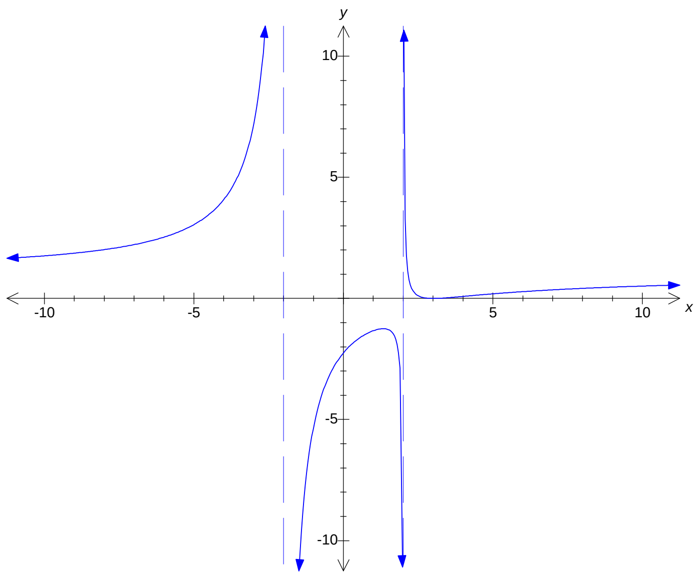
$$f'\left(\frac{2+b}{2}\right)=2\left(\frac{2+b}{2}-b\right)\left(\frac{2+b}{2}\cdot b-4\right)=2\underbrace{\left(1-\underbrace{\frac{b}{2}}_{>1}\right)}_{<0}\underbrace{\left(\frac{\overbrace{2b}^{>4}+\overbrace{b^2}^{>4}}{2}-4\right)}_{>0}=2\cdot(-)\cdot(+)<0$$

$$f'\left(\frac{2+\frac{4}{b}}{2}\right)=f'\left(1+\frac{2}{b}\right)=2\left(1+\overbrace{\frac{2}{b}}^{>1}-\overbrace{b}^{>2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{b}\right)b-4\right)=2(-)(+)<0$$

$$f\left(\frac{4}{b}\right)=\frac{\left(\frac{4}{b}-b\right)^2}{\left(\frac{4}{b}\right)^2-4}=\frac{\frac{1}{b^2}(4-b^2)^2}{\frac{4}{b^2}(4-b^2)}=\frac{1}{4}\left(4-\overbrace{b^2}^{>4}\right)<0$$

$$\max\left(\frac{4}{b},1-\frac{b^2}{4}\right),\qquad \min\left(\frac{b}{0}\right)$$

ב.



ג. בתחום: $\frac{4}{b}<x<2$, הפונקציה $f(x)$ יורדת וגם קעורה למטה, ולכן בתחום זה, $f'(x)<0$
ו-$f''(x)<0$, לכן הפתרון הוא: $\frac{4}{b}<x<2$

4. נתונה הפונקציה

$$f(x)=\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

בתחום $-3\pi \le x \le 3\pi$

א. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.

ג. לפונקציה יש שלוש נקודות מקסימום בתחום הנתון.
מצא את שיעורי הנקודות הללו

ד. העבירו ישר דרך נקודות המקסומום של הפונקציה.
מצא בתחום $-\pi \le x \le \pi$ את השטח המוגבל על ידי הישר, על ידי גרף הפונקציה, על ידי שתי האסימפטוטות ועל ידי ציר ה-x.

א. $\cos(-t)=\cos(t)$

$$f(-t)=\frac{2\cos^2\left(\frac{-t}{2}\right)-1}{2\cos^2\left(\frac{-t}{2}\right)}=\frac{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1}{2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}=f(t)$$

ב. אסימפטוטות אנכיות: נשווה את המכנה ל-0.

$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\Rightarrow x=\pi+2\pi k$$

בתחום ההגדרה תהיינה אסימפטוטות אנכיות ב: $\boldsymbol{x=-3\pi,-\pi,\pi,3\pi}$

ג.

$$u=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1=\cos x$$

$$u'=-2\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-\sin x$$

$$v'=-\sin x$$

$$f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+1}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x\cdot(\cos x+1)+\sin x\cdot\cos x}{4\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}=-\frac{\sin x}{4\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}=0$$

$$\sin x=0\Rightarrow x=\pi k$$

בתחום ההגדרה: $x=-2\pi,0{,}2\pi$

$$\cos -2\pi=\cos 0=\cos 2\pi=1$$

ולכן כשנציב בפונקציה נקבל

$$f(-2\pi)=f(0)=f(2\pi)=\frac{\cos 0}{\cos 0+1}=\frac{1}{2}$$

וכך נקבל את שלושת הנקודות: $\boldsymbol{\left(-2\pi,\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(2\pi,\frac{1}{2}\right)}$

נגזור נגזרת שניה על מנת לבדוק את סוג הנקודות

$$f''(x)=-\cos x$$

$$f''(-2\pi)=f''(0)=f(2\pi)=-1<0$$

שלושת הנקודות הן נקודות מקסימום.

ד.

$$f(x) = 0$$
$$2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{x_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{x_1}{2} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$
$$x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 4\pi k$$

$$\cos\left(\frac{x_2}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{x_2}{2} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$
$$x_2 = \pm\frac{3\pi}{2} + 4\pi k$$
$$0 < x_A < \pi \Rightarrow x_A = \frac{\pi}{2}$$

$$S_{OBCD} = \frac{1}{2}\cdot\pi$$
$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)dx$$

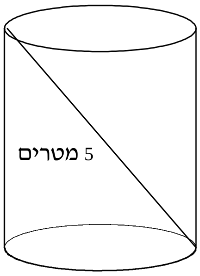
נוכיח בנגזרתף

$$\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$S_2 = \left[x - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi}{2} - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - [0 - \tan 0] = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\boldsymbol{S = 2\cdot S_1 = 2}$$

5. רוצים לבנות דוד מים בצורת גליל, כך שאורך האלכסון של החתך הצירי של הגליל יהיה 5 מטרים (ראה ציור).
הדוד פתוח מלמעלה.
המחיר של מ"ר חומר לבסיס הגליל גדול פי 3 המחיר של מ"ר של החומר לדופן הגליל (המעטפת של הגליל).
מהו שטח הבסיס של הדוד, שעבורו המחיר של כל החומר לבניית הדוד הפתוח הוא מקסימלי?



a – מחיר דופן
$3a$ – מחיר בסיס

$(2x^2)+h^2=5^2$
$h^2=25-4x^2$
$h=\sqrt{25-4x^2}$

$f(x)=\pi\cdot(x^2)\cdot 3a+2\pi\cdot\sqrt{25-4x^2}=\pi a\left(3x^2+2x\sqrt{25-4x^2}\right)$

$f'(x)=\pi a\left[6x+2\cdot\sqrt{25-4x^2}\pm\frac{8x}{\cancel{2}\cdot\sqrt{25-4x^2}}\cdot\cancel{2}x\right]=0$
$6x+2\sqrt{25-4x^2}-\frac{8x^2}{\sqrt{25-4x^2}}=0$
$6\sqrt{25-4x^2}+2(25-4x^2)-8x^2=0$
$6x\sqrt{25-4x^2}+50-16x^2=0$
$6x\sqrt{25-4x^2}=16x^2-50$
$36x^2(25-4x^2)=(16x^2-50)^2$
$[x^2=t]$
$36t(25-4t)=(16t-50)^2$
$900t-144t^2=256t^2-1600t+2500$
$400t^2-2500t+2500=0$
$4t^2-25t+25$
$\boldsymbol{t_1=5},t_2=\frac{5}{4}$
t_2 לא בתחום ההגדרה

$x^2=5x=\sqrt{5}$

x	1	$\sqrt{5}$	3
y'	$+$ ↗	0 max	$-$ ↘

6. נתונה הפונקציה $y=-12\sqrt{x}+6x$

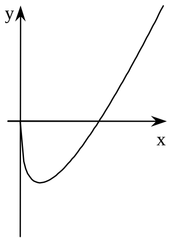
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב.

(1) מצא את השיעורים של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה.

(2) קבע את סוגה של נקודת הקיצון שמצאת. פרט את חישוביך.

ג. בהסתמך על תשובותיך לסעיף ב', קבע אם נקודה ששיעור ה-y שלה הוא -7, נמצאת על גרף הפונקציה. נמק.



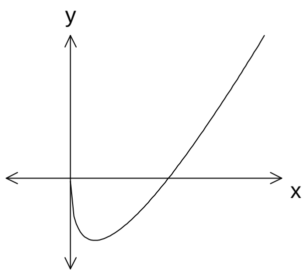
א. תחום בבגדרה של הפונקציה הוא כאשר מה שנמצא בתוך השורש גדול או שווה ל-0.
לכן תחום ההגדרה הוא $x\geq 0$

ב.

(1) נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0.

$$y'=-\frac{12}{2\sqrt{x}}+6$$

$$\frac{-12}{2\sqrt{x}}+6=0\ \ /\cdot 2\sqrt{2}$$
$$-12+12\sqrt{x}=0$$
$$12\sqrt{x}=12$$
$$\sqrt{x}=1$$
$$\boldsymbol{x=1}$$



נציב בפונקציה ונקבל:

$$y=-12\sqrt{1}+6\cdot 1=-12+6=-6$$

(2) נגזור נגזרת שניה כדי לקבוע את סוג נקודת הקיצון

$$y''=\frac{12}{2\sqrt{x}}$$

נציב בנגזרת השניה $x=1$ ונקבל

$$y''=\frac{12}{2\sqrt{1}}=6>0$$

ניתן גם להשתמש בטבלה:

x	0	0.5	1	2
y'		$-\searrow$	0	$+\nearrow$

או שנסתמך על הסרטוט ונקבע כי הנקודה היא נקודת מינימום.

ג. מאחר ערך ה-y בנקודת המינימום המוחלט הוא $y=-6$, נקודה שערך ה-y שלה הוא 7
לא יכולה להיות על גרף הפונקציה.