פתרונות שאלון 007 חורף 2009

1. א.

$A(t_1, y_1)\ ,\ B(t_2, y_2)$

$F_1\left(\frac{p}{2}, 0\right)\ ,\ F_2\left(\frac{p}{4}, 0\right)$

מציאת A : חיתוך הישר $\ell: y = mx$ עם פרבולה I $y^2 = 2px$.

$$A\left(\frac{2p}{m^2}, \frac{2p}{m}\right) \qquad m^2x^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2p}{m^2} \qquad y_1 = mx_1 = m \cdot \frac{2p}{m^2} = \frac{2p}{m}$$

מציאת B : חיתוך הישר $y = mx$ עם פרבולה II $y^2 = px$

$$A\left(\frac{p}{m^2}, \frac{p}{m}\right) \qquad m^2x^2 = px \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{p}{m^2} \qquad y_2 = mx_2 = m \cdot \frac{p}{m^2} = \frac{p}{m}$$

שיפוע המשיק ℓ_1 : $m_1 = \frac{p_1}{y_1} = \frac{p}{\frac{2p}{m}} = \frac{m}{2}$

שיפוע המשיק ℓ_2 : $m_2 = \frac{p_2}{y_2} = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{m}} = \frac{m}{2}$

ומכאן : $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$. המשיקים מקבילים.

__תשובה__ : הוכחה.

ב.

$$S_{\triangle DCA} = \frac{CD\left(t_1 + \frac{p}{2}\right)}{2} \qquad S_{\triangle DCB} = \frac{CD\left(t_2 + \frac{p}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{S_{\triangle DCA}}{S_{\triangle DCB}} = 1.5 = \frac{\frac{CD\left(t_1 + \frac{p}{2}\right)}{2}}{\frac{CD\left(t_2 + \frac{p}{2}\right)}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_1 + \frac{p}{2}}{t_2 + \frac{p}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$2x_1 + p = 3x_2 + 1.5p \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 3x_2 + 0.5p \quad \Rightarrow \quad 2\frac{2p}{m^2} = 3\frac{p}{m^2} + 0.5p$$

$$\frac{4}{m^2} = \frac{3}{m^2} + 0.5 \quad \Rightarrow \quad 4 = 3 + 0.5m^2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{2}$$

__תשובה__ : $m = \sqrt{2}$

2. א.

מציאת הנקודה L (חיתוך של הישרים I ו-II).

$$I:\quad y=-2x+8$$
$$II:\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$
$$-2x+8=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$$
$$-6x+24=x+10$$
$$14=7x$$
$$x=2 \quad\Rightarrow\quad y=4 \qquad\qquad L(2,4)$$

L נמצאת על הישר ועוברת דרך הנקודה P. ולכן, מקיימת את משוואת הקו.

$$(2+k)2-2\cdot 4-8+10k=0$$
$$12k-12=0$$
$$k=1$$

ולכן משוואת הקו L:

$$3x-2y-8+10=0$$
$$3x-2y+2=0$$

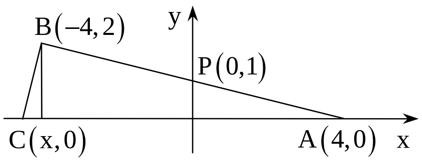
שיעורי הנקודה P: $y=1\ ,\ x=0 \quad\Rightarrow\quad P(0,1)$

P אמצע AB ולכן:

$$A(x_1,y_1)\ ,\ B(x_2,y_2)$$
$$\frac{x_1+x_2}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=-x_1$$
$$\frac{y_1+y_2}{2}=1 \quad\Rightarrow\quad y_1+y_2=2$$
$$y_1=-2x_1+8$$
$$y_2=\frac{1}{3}x_2+\frac{10}{3}$$
$$-2x_1+8+\frac{1}{3}(-x_1)+\frac{10}{3}=2$$
$$-6x_1+24-x_1+10=6$$
$$28=7x_1$$
$$x_1=4 \quad\Rightarrow\quad y=0 \qquad\qquad A(4,0)$$
$$m_{AB}=m_{AP}=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\frac{1-0}{0-4}=-\frac{1}{4}$$
$$\tan\alpha=-\frac{1}{4}$$
$$\alpha=165.96^\circ$$

<u>תשובה</u>: $\alpha=165.96^\circ$

ב.



AB הוא קוטר במעגל ולכן $P(0,1)$ מרכז

המעגל. לכן, רדיוסו $R=AP=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$.

משוואת המעגל היא $x^2+(y-1)^2=17$.

$$S_{\vartriangle ABC}=\frac{AC\cdot h}{2}=8.5$$
$$AC=8.5$$

ומכאן, $x=-4.5$. כלומר, שיעורי הנקודה C הם : $C(-4.5,0)$.

משוואת המשיק למעגל בנקודה B :

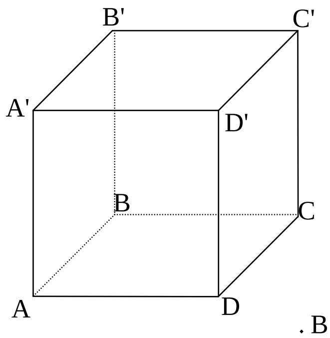
$$-4x+(y-1)(0-1)=17$$
$$-4x+y-1=17$$

חיתוך המשיק עם ציר x : $y=0$ ולכן,

$$-4x=18 \quad \Rightarrow \quad x=-4.5$$

כלומר, המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה $C(-4.5,0)$ ולכן הישר BC משיק למעגל זה.

.3



$A'B'BA: \quad 2x - y + 2z = 4$

$B'C'CD: \quad 2y + z = 0$

$A'(2,-2,z)$

A' נמצאת על מישור $A'B'BA$ ולכן, $2\cdot 2-(-2)+2z=4$

כלומר, $A'(2,-2,-1)$.

א.

ישר החיתוך של המישורים $A'B'BA$, $B'C'CB$ הוא ישר $B'B$.

וקטור הכיוון שלו הוא הוקטור המאונך למישור הפיאה $A'B'C'D'$ המבוקש.

מציאת ישר החיתוך $B'B$:

$2y+z=0 \quad \Rightarrow \quad z=-2y$

$2x-y+2z=4 \quad \Rightarrow \quad 2x=y-2z+4=y-2(-2y)+4=5y+4 \quad \Rightarrow \quad x=2.5y+2$

מציאת שתי נקודות על הישר:

עבור: $y=0\ ,\ z=0\ ,\ x=2 \qquad M_1(8,0,0)$

עבור: $y=2\ ,\ z=-4\ ,\ x=7 \qquad M_2(7,8,-4)$

ומכאן וקטור הכיוון של $B'B$ הוא $\underline{h}_{B'B}=(5,2,-4)$. ומכאן: $\pi_{A'B'C'D'}: 5x+2y-4z+d=0$.

A' נמצאת עליו ולכן: $5\cdot 2+2\cdot(-2)-4\cdot(-1)+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-10$.

מכאן: $\pi_{A'B'C'D'}: 5x+2y-4z=10$.

<u>תשובה</u>: $\pi_{A'B'C'D'}: 5x+2y-4z=10$

ב. (1)

הישר $A'B'$ מאונך למישור $B'C'CB$. ולכן, וקטור שלו הוא הוקטור המאונך למישור $B'C'CB$. כלומר, $\underline{h}=(0,2,1)$ ולכן הצגה פרמטרית של הישר $A'B'$ היא:

$\ell_{A'B'}=\underline{x}=(2,-2,-1)+t(0,2,1)$.

B' היא נקודת החיתוך של הישר $\ell_{A'B'}$ והמישור $B'C'CD$.

מציאת B' :

$x=2\ ,\ y=-2+2t\ ,\ z=-1+t$

נציב במשוואת המישור $B'C'CD$:

$2(-2+2t)+(-1+t)=0$

$-4+4t-1+t=0$

$t=1$

ולכן: $B'=(8,-2,-1)+(10,2,1)=(2,0,0)$.

(2)

הישר המבוקש הוא הישר $B'C'$.

וקטור הכיוון שלו הוא הווקטור המאונך למישור $A'B'BA$ והוא $\underline{h}=(2,-1,2)$.

ולכן הצגה פרמטרית שלו תהיה: $\ell_{B'C'}=\underline{x}=B'+t\underline{h}$

כלומר: $\underline{x}=(2,0,0)+t(2,-1,2)$.

<u>תשובה</u>: $\underline{x}=(2,0,0)+t(2,-1,2)$

4. א.

$$2\ell n2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\ell n3=\ell n\left(3^{\frac{1}{x}}+27\right)$$

$$\ell n2^2+\ell n3^{1+\frac{1}{2x}}=\ell n\left(3^{\frac{1}{x}}+27\right)$$

$$\ell n\left(4\cdot3^{1+\frac{1}{2x}}\right)=\ell n\left(3^{\frac{1}{x}}+27\right)$$

$$4\cdot3^{1+\frac{1}{2x}}=3^{\frac{1}{x}}+27$$

$$4\cdot3\cdot3^{\frac{1}{2x}}=3^{\frac{1}{x}}+27$$

$$12\left(3^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{x}}+27$$

נסמן: $t^2=3^{\frac{1}{x}}$

$$12t=t^2+27$$

$$t^2-12t+27=0\quad\Rightarrow\quad(t-3)(t-9)=0\quad\rightarrow\quad t_1=3\ ,\ t_2=9$$

$$\text{I.}\quad 3^{\frac{1}{x}}=3^2\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{x}=2\quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{1}{2}$$

$$\text{II.}\quad 3^{\frac{1}{x}}=9^2=3^4\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{x}=4\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{1}{4}$$

<u>תשובה</u>: $x=\frac{1}{2}\ ,x=\frac{1}{4}$

ב.

למשוואה הריבועית פתרון יחיד כאשר: I. $a=0$

II. $\Delta=0$

(1)

I.

$$a=0$$

$$mi+4=0$$

$$m=-\frac{4}{i}=4i$$

כאשר $m=4i$ המשוואה תהיה בלתי אפשרית: $\left(0\cdot z^2+0\cdot z-2=0\right)$

II. $\Delta=0$. כלומר,

$$(m-4i)^2+8(mi+4)=0$$

$$m^2-8im-16+8mi+32=0$$

$$m^2=-16\quad\Rightarrow\quad m_1=4i\ \varnothing\ ,m_2=-4i$$

<u>תשובה</u>: $m=-4i$.

(2)

עבור $m=-4i$ המשוואה תהיה: $8z^2-8iz-2=0$.

ומאחר ו- $\Delta=0$ הפתרון: $z=\frac{-5}{24}=\frac{8i}{16}=\frac{1}{2}i$

<u>תשובה</u>: $z=\frac{1}{2}i$.

5. א.

$$f(x)=\ell n\frac{1-x}{1+x}$$

(1)

תחום הגדרה:

$$\frac{1-x}{1+x}>0$$
$$(1-x)(1+x)>0$$
$$1-x^2>0$$
$$-1<x<1$$

<u>תשובה</u>: $-1<x<1$

(2)

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'=\frac{x+1}{1-x}\cdot\frac{-1(x+1)-(1-x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{-x-1-1+x}{(1-x)(1+x)}$$
$$f'(x)=\frac{-2}{1-x^2}=\frac{2}{x^2-1}$$

לא קיים x עבורו $f'(x)=0$ ולכן אין נקודות קיצון.

<u>תשובה</u>: אין.

ב. (1)

$$g(x)=\frac{1}{x^2-1}\qquad g'(x)=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

נקודות חשודות: $g'(x)=0$ $\quad -2x=0$ כלומר, נקודה חשודה $x=0$.

בדיקת נקודות קיצון: $g''(x)=\frac{-2}{(x^2-1)^2}$ הנקודות חשודות.

מקסימום: $g''(2)=-2<0$

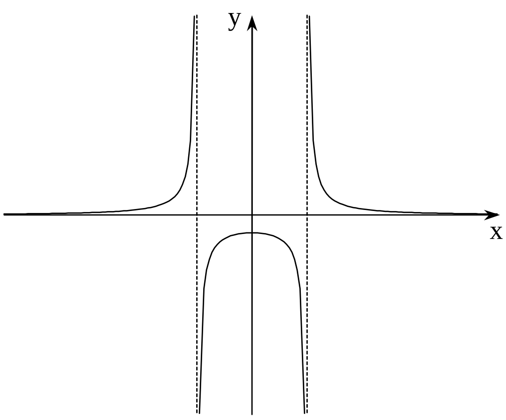
<u>תשובה</u>: $Max(0,-1)$

(2)

אסימפטוטה אנכית: $y=0$

אסימפטוטה אופקית: $x=1$, $x=-1$

סקיצה של גרף הפונקציה:



ג.

השטח המקווקו:

$$S=\int_0^{0.5}\left[(2x-1)-\frac{1}{x^2-1}\right]dx$$

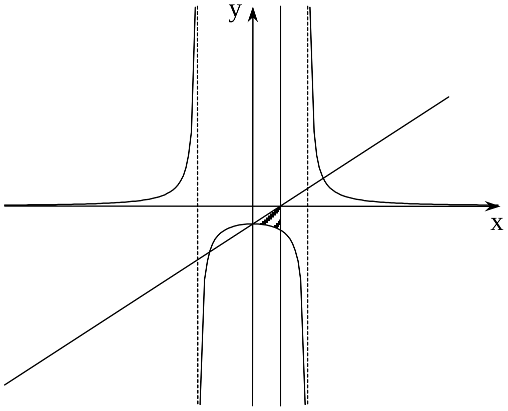
על פי סעיף א':

$$g(x)=\frac{1}{2}f'(x)$$

ולכן:

$$\int g(x)=\frac{1}{2}f(x)+c$$

ומכאן:



$$S=\int_0^{0.5}\left[(2x-1)-\frac{1}{x^2-1}\right]dx=\left[x^2-x-\frac{1}{2}\ell n\frac{1-x}{1+x}\right]_0^{0.5}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ell n\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right]-\left(\frac{1}{2}\ell n1\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ell n\frac{1}{3}=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ell n3=0.2993$$

<u>תשובה</u>: $S=0.2993$