1. נתון מעגל שמשוואתו $x^2+y^2=100$.

המעגל חותך את החלק החיובי של ציר ה- x בנקודה A .

נקודה B נמצאת על המעגל ברביע הראשון כך ש- $\sphericalangle BOA=30^\circ$. O - ראשית הצירים.

א. נתונים מעגלים משיקים לישר OB , וההיקף של כל מעגל הוא $\frac{1}{2}$ מהיקף המעגל הנתון.

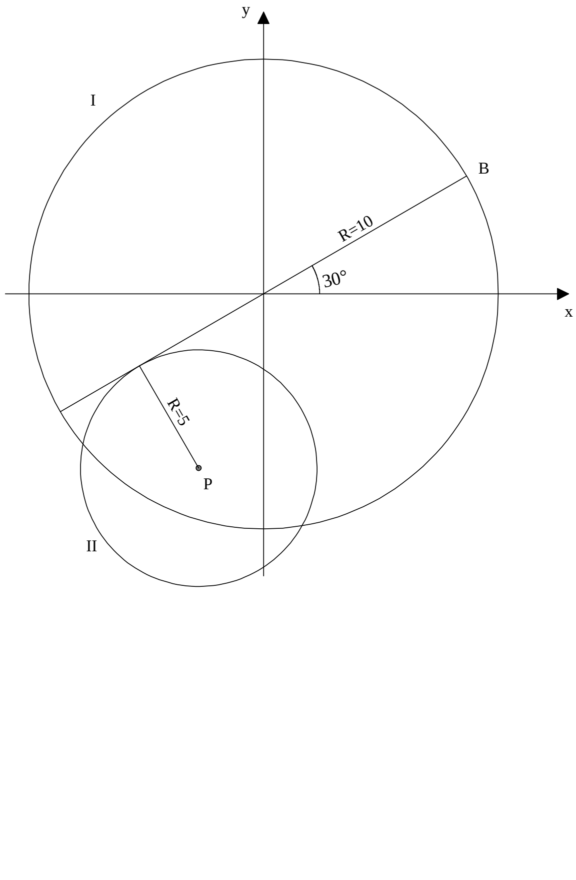
מצאת את המשוואות של המקום הגיאומטרי של מרכזי מעגלים אלו.

ב. המעגל הנתון חותך את המקום הגיאומטרי, שנמצא בסעיף א', בארבע נקודות.

חשב את שטח המרובע הנוצר על ידי ארבע נקודות אלו.

$$I.x^2+y^2=100$$
$$R=10$$
$$M(0,0)$$
$$x_B=10\cdot\cos30^\circ=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$
$$y_B=10\cdot\sin30^\circ=10\cdot\frac{1}{2}=5$$
$$B\left(5\sqrt{3},5\right)$$
$$OB: m_{OB}=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$OB: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$
$$H_I=2\pi R_I=2\pi\cdot10=20\pi$$

$$\underset{\text{היקף}}{H_{II}}=2\pi R_{II}=\frac{1}{2}\cdot2\pi R_I=\pi R_1$$
$$R_{II}=\frac{1}{2}\cdot R_I=5$$
$$OB:\frac{1}{\sqrt{3}}x-y=0$$
$$d=R_{II}=5$$



$$\pm\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x_0-y_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}}=5\Rightarrow\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-y}{\sqrt{\frac{4}{3}}}=\pm5$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}x-y=\pm5\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\pm\frac{10}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x\pm\frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{10}{\sqrt{3}}}$$
או
$$\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{10}{\sqrt{3}}}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}x\pm\frac{10}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\pm\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2=100$$

$$x^2+\frac{1}{3}x^2\pm\frac{20}{3}x+\frac{100}{3}=100$$

$$4x^2\pm 20x-200=0$$

$$x^2\pm 5x-50=0$$

$$(+)$$

$$x^2+5x-50=0$$

$$(x+10)(x-5)=0$$

$$x_1=-10; x_2=5$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$(-)$$

$$x^2-5x-50=0$$

$$(x-10)(x+5)=0$$

$$x_3=10; x_4=-5$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$y_1=-\frac{10}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}=0$$

$$y_2=\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$$

$$y_3=\frac{10}{\sqrt{3}}-\frac{10}{\sqrt{3}}=0$$

$$y_4=-\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{10}{\sqrt{3}}=-5\sqrt{3}$$

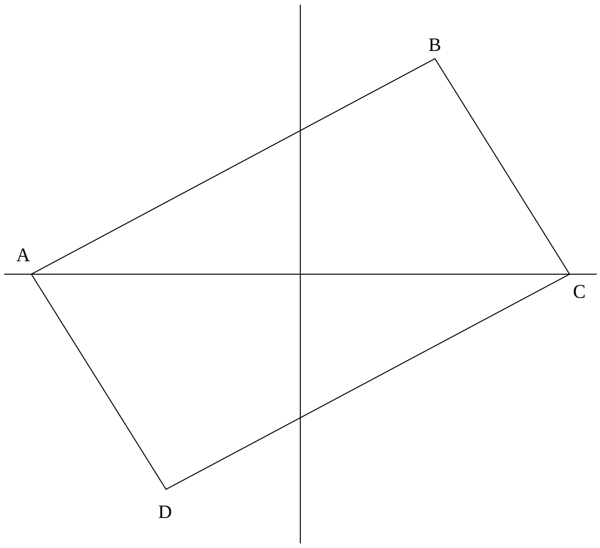
$$A(-10,0); B\left(5,5\sqrt{3}\right); C(10,0); D\left(-5,-5\sqrt{3}\right)$$

$$m_{AB}=\frac{5\sqrt{3}}{5-(-10)}=\frac{5\sqrt{3}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_{BC}=\frac{5\sqrt{3}}{5-10}=\frac{5\sqrt{3}}{-5}=-\sqrt{3}$$

$$m_{CD}=\frac{-5\sqrt{3}}{-5-10}=\frac{-5\sqrt{3}}{-15}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_{AD}=\frac{-5\sqrt{3}}{-5-(-10)}=\frac{-5\sqrt{3}}{5}=-\sqrt{3}$$



$$m_{AD}=m_{BC}\,;m_{AB}=m_{CD}$$

$$m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$$

$$S=AB\cdot BC$$

$$AB^2=\left(5\sqrt{3}\right)^2+\left(5-(-10)\right)^2=300$$

$$AB=10\sqrt{3}$$

$$BC^2=\left(5\sqrt{3}\right)^2+\left(5-10\right)^2=100$$

$$BC=10$$

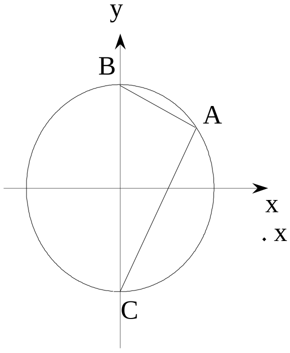
$$S=AB\cdot BC=10\cdot 10\sqrt{3}=100\sqrt{3}$$

2. אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a<b$

חותכת את ציר ה- y בנקודות B ו- C.

A היא נקודה על האליפסה ברביע הראשון (ראה ציור).

נתון: $AC=37, BC=40, BA=13$



א. מצא את משוואת האליפסה.

דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ב. נתונה היפרבולה קנונית.

מנקודה A, שעל האליפסה הנתונה, מורידים אנך לציר ה- x.

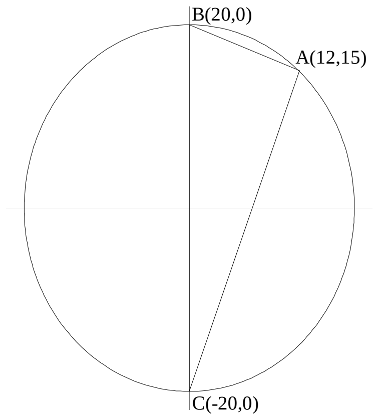
האנך חותך את ציר ה- x בנקודה F.

ואת האסימפטוטות של ההיפרבולה בנקודות M ו- N.

הנקודה F היא המוקד הימני של ההיפרבולה.

נתון: $MN=24$

מצא את משוואת ההיפרבולה.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$x=0 \Rightarrow y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b$$

$$BC=2b=40 \Rightarrow b=20$$

$$AB^2=169=x^2+(y-20)^2$$

$$AC^2=1369=x^2+(y+20)^2$$

$$1200=(y+20)^2-(y-20)^2$$

$$1200=\left((y+20)+(y-20)\right)\left((y+20)-(y-20)\right)=2y\cdot 40=80y \quad \left(A^2-B^2=(A+B)(A-B)\right)$$

$$1200=\cancel{y^2}+40y\cancel{+400}\cancel{-y^2}+40y\cancel{-400}=80y$$

$$y=15 \Rightarrow 169=x^2+(15-20)^2=x^2+25$$

$$144=x^2 \Rightarrow x=12 \Rightarrow A(12,15)$$

$$\frac{12^2}{a^2}+\frac{15^2}{20^2}=1 \Rightarrow \frac{144}{a^2}+\frac{9}{16}=1 \Rightarrow \frac{144}{a^2}=\frac{7}{16}$$

$$a^2=329\tfrac{1}{7}$$

$$\frac{x^2}{329\frac{1}{7}}+\frac{y^2}{400}=1$$

$A(12,15);F(12,0)$

$F(c,0)\Rightarrow c=12$

$c^2=a^2+b^2=144$

$M\left(12,12\frac{b}{a}\right);N\left(12,-12\frac{b}{a}\right)\Rightarrow MN=24\cdot\frac{b}{a}$

$24=MN=24\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=1\Rightarrow a=b$

$144=a^2+b^2=2a^2\Rightarrow a^2=72=b^2$

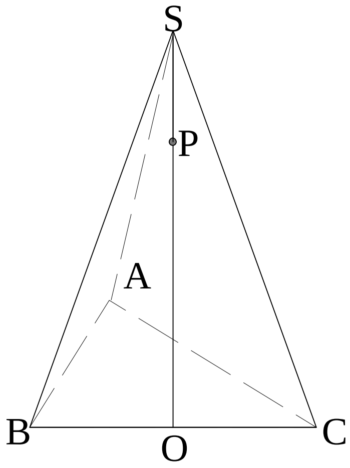
$\frac{x^2}{72}-\frac{y^2}{72}=1$

3. נתונה פירמידה משולשת $SABC$.

הנקודה O נמצאת על BC , והיא מרכז המעגל החוסם את הבסיס ABC של הפירמידה.

SO הוא גובה הפירמידה. P היא נקודה על SO (ראה ציור).

נתון: $AB = BO = PS = a, t\overrightarrow{SO} = (1+t)\overrightarrow{PO}$



א. הבע את הווקטור $\overrightarrow{PO}$ באמצעות t ובאמצעות הווקטור $\overrightarrow{SP}$.

ב. נתון כי נפח הפירמידה $SABC$ הוא $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

מצא את הערך של t .

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים. הכיוון של $\overrightarrow{OC}$ הוא בכיוון החיובי של ציר ה- x , והכיוון של $\overrightarrow{OS}$ הוא בכיוון החיובי של ציר ה- z .

נתון גם כי $a = 8$.

דרך הנקודה P מעבירים מישור המקביל לבסיס ABC

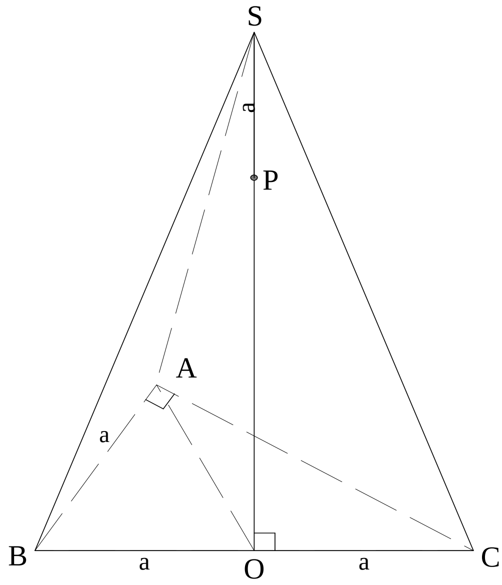
מצא הצגה פרמטרית של מישור זה.

$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{SO}-\overrightarrow{PO}=\left(1-\frac{t}{1+t}\right)\overrightarrow{SO}=\left(\frac{1+t-t}{1+t}\right)\overrightarrow{SO}=\left(\frac{1}{1+t}\right)\overrightarrow{SO}$$

$$t\overrightarrow{SO}\ =(1+t)\overrightarrow{PO}\Rightarrow\overrightarrow{SO}=\frac{1+t}{t}\overrightarrow{PO}$$

$$\overrightarrow{SP}=\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1+t}{t}\overrightarrow{PO}\Rightarrow\frac{1}{t}\overrightarrow{PO}$$

$$\boxed{\overrightarrow{PO}=t\overrightarrow{SP}}$$



$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{AB\cdot AC\cdot h}{2}$$

$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$$

$$V=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{\sqrt{3}}\,\cancel{a}\cdot h}{2}=\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}}a^{\cancel{3}}$$

$$h=4a=\left|\overrightarrow{SO}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{SO}\right|=(1+t)\cdot\left|\overrightarrow{SO}\right|=(1+t)a=4a$$

$$1+t=4$$

$$\boxed{t=3}$$

$$a=8$$

$$O(0,0,0);\ C(8,0,0);\ S(0,0,32)$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=t\left|\overrightarrow{SP}\right|=3a=24$$

$$P(0,0,24)$$

$$\boxed{\pi: x=(0,0,24)+t(1,0,0)+s(0,1,0)}$$

4. א. שני מקומות גיאומטריים I ו- II, מקיימים:

$$\text{I. } \frac{1}{z}+\frac{z}{|z|^2}=1$$

$$\text{II. } z\cdot z-(z+z)=3$$

z הוא מספר מרוכב

נקודה P נמאת על המקום הגיאומטרי II.

האם הנקודה P יכולה להימצא גם על המקום הגיאומטרי I? נמק.

ב. הנקודה $z=1+yi$ נמצאת על המקום הגיאומטרי I ברביע הראשון, והיא אחד מפתרונות המשוואה $z^4=a$.

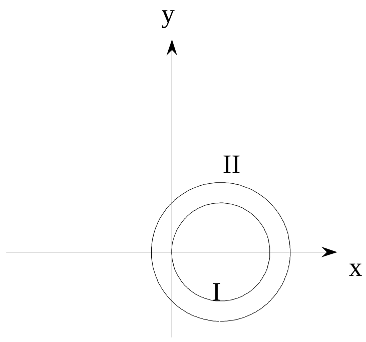
a הוא מספר ממשי.

חשב את כל הפתרונות של המשוואה.

$$z=x+yi$$

$$\text{I. } \frac{1}{z}+\frac{z}{|z|^2}=1$$

$$\text{II. } z\cdot\bar{z}-(\bar{z}+z)=3$$



$$\text{I. } \frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}+\frac{x+yi}{x^2+y^2}=1$$

$$\frac{x-yi+x+yi}{x^2+y^2}=1$$

$$2x=x^2+y^2$$

$$x^2-2x+y^2=0 \quad /+1$$

$$\boxed{(x-1)^2+y^2 \qquad \text{מעגל:}}$$

$$M(1,0);R=1$$

$$\text{II. } (x+yi)(x-yi)-(x-yi+x+yi)=3$$

$$x^2+y^2-2x=3 \quad /+1$$

$$\boxed{(x-1)^2+y^2=4 \qquad \text{מעגל:}}$$

$$M(1,0);R=2$$

א. P <u>לא</u> יכולה להיות על I וגם על II. שניהם מעגלים עם אותו מרכז ורדיוסים שונים.

ב.

$$z = 1 + yi \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = y > 0 \end{matrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} (1-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{z}$$

$$\tan\theta = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$z = \sqrt{2}\,\text{cis}\,45^\circ$$

$$z^4 = \sqrt{2}^4\,\text{cis}\left(4 \cdot 45^\circ\right) = 4\,\text{cis}\,180^\circ = -4$$

$$z^4 = a = -4$$

$$z^4 = 4\,\text{cis}\,180^\circ$$

$$z_k = \sqrt[4]{4}\,\text{cis}\left(\frac{180^\circ + 360^\circ k}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{cis}\left(45^\circ + 90^\circ k\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,45^\circ = 1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,135^\circ = -1 + i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,225^\circ = -1 - i$$

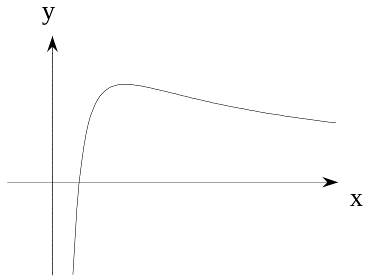
$$z_4 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,315^\circ = 1 - i$$

5. נתונות הפונקציות:

$f(x)=\frac{\ln(ax)}{x}$

$g(x)=\frac{\ln^2(ax)}{x}$

$a>0$



בציור מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת המקסימום של $f(x)$.

ב. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגו.

ג. (1) הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של הגרף של $f(x)$ עם הגרף של $g(x)$.

(2) העתק למחברתך את הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, וסרטט באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$ ועל ידי הגרף של $g(x)$.

תחום ההגדרה: $x>0$.

$$f(x)=\frac{\ln(ax)}{x}$$

$$u=\ln(ax)\Rightarrow u'=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$$

$$v=x\Rightarrow v'=1$$

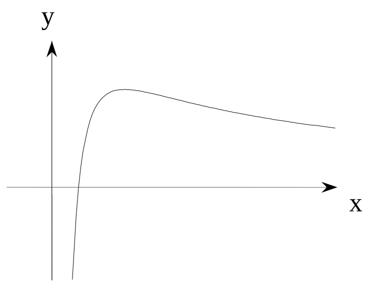
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln(ax)}{x^2}=\frac{1-\ln(ax)}{x^2}=0$$

$$\ln(ax)=1\Rightarrow ax=e^1\Rightarrow x=\frac{e}{a}$$

$$f\left(\frac{e}{a}\right)=\frac{\ln e}{\frac{e}{a}}=\frac{1}{\frac{e}{a}}=\frac{a}{e}\Rightarrow \boxed{\max\left(\frac{e}{a},\frac{a}{e}\right)\quad \text{א.}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow f''\left(\frac{e}{a}\right)=-\frac{a}{e}<0\Rightarrow \max$$

מונה בלבד
לקביעת סימן



$$g(x)=\frac{\ln^2(ax)}{x}$$

$$u=\ln^2(ax)\Rightarrow u'=2\ln(ax)\cdot\frac{1}{x}$$

$$v=x\Rightarrow v'=1$$

$$g'(x)=\frac{2\ln(ax)-\ln^2(ax)}{x^2}=0$$

$$\ln(ax)[2-\ln(ax)]=0$$

$$\ln(ax)=0 \quad \ln(ax)=2$$

$$ax=e^0=1 \quad ax=e^2$$

$$x=\frac{1}{a} \qquad x=\frac{e^2}{a}$$

$$g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\ln^2(1)}{\frac{1}{a}}=0$$

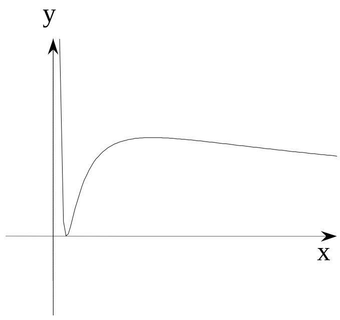
$$g''\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{\frac{1}{a}}-\frac{2\ln 1}{\frac{1}{a}}=2a>0$$

$$\boxed{\min\left(\frac{1}{a},0\right) \quad \text{.ב}}$$

$$g\left(\frac{e^2}{a}\right)=\frac{\ln^2(e^2)}{\frac{e^2}{a}}=\frac{4}{\frac{e^2}{a}}=\frac{4a}{e^2}$$

$$g''\left(\frac{e^2}{a}\right)=\frac{2}{\frac{e^2}{a}}-2\cdot\frac{\ln e^2}{\frac{e^2}{a}}=\frac{2a}{e^2}-\frac{4a}{e^2}=\frac{-2a}{e^2}<0$$

$$\boxed{\max\left(\frac{e^2}{a},\frac{4a}{e^2}\right) \quad \text{.ב}}$$



$$f(x)=g(x)\Rightarrow f(x)-g(x)=0$$

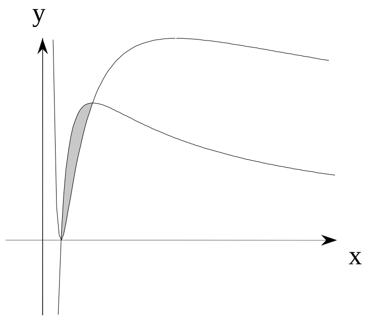
$$\frac{\ln^2(ax)}{x}-\frac{\ln(ax)}{x}=0$$

$$\frac{\ln(ax)}{x}\left(\ln(ax)-1\right)=0$$

$$\ln(ax)=0 \qquad \ln(ax)=1$$

$$x=\frac{1}{a} \qquad x=\frac{e}{a}$$

ג. $\boxed{\left(\frac{1}{a},0\right) \qquad \left(\frac{e}{a},\frac{a}{e}\right)}$



$$S=\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}\left[\frac{\ln(ax)}{x}-\frac{\ln^2(ax)}{x}\right]dx=$$

$$\left[\ln^2(ax)\right]'=\frac{2\ln(ax)}{x};\ \left[\ln^3(ax)\right]'=\frac{3\ln^2(ax)}{x}$$

$$S=\left[\frac{1}{2}\ln^2(ax)-\frac{1}{3}\ln^3(ax)\right]\Bigg|_{\frac{1}{a}}^{\frac{e}{a}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln e-\frac{1}{3}\ln e\right)-\left(\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{3}\ln 1\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

ד. $\boxed{S=\frac{1}{6}}$