



בגרות לבתי ספר על-יסודיים
מועד הבחינה : חורף תשס"ח 2008
מספר השאלון : 035005
נספח: דפי נוסחאות ל- 4 ול- 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

שאלון ה'

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה : שעה ושלושה רבעים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה : בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון - אלגברה - $33\frac{1}{3}$ נקודות.
פרק שני - הנדסת המישור והסתברות - $33\frac{1}{3} \times 2$ - $66\frac{2}{3}$ נקודות.
-
- ג. חומר עזר מותר בשימוש :
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות :
1. אל תעתיק את השאלה ; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
בהצלחה!

פרק א': אלגברה: (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור אחת מהשאלות 1 – 2.

1. נתונה הפרבולה $f(x) = (m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2$, $m \neq \pm 1$.
- א. מצא עבור אילו ערכים של m הפרבולה נמצאת כולה מעל לישר $y = 1$.
- ב. מצא עבור אילו ערכים של m הפרבולה חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות שונות, הנמצאות משמאל לראשית הצירים.

2. הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = x \cdot a_n - 8 \end{cases}$$

ידוע כי הסדרה b_n , המוגדרת לכל n טבעי על ידי $b_n = a_n - 4$, היא סדרה הנדסית שהמנה

שלה 3.

א. חשב את x .

עבור ה- x שחישבת בסעיף א מצא:

ב. נוסחה לאיבר כללי בסדרה b_n .

ג. נוסחה לאיבר כללי בסדרה a_n .

ד. נוסחה עבור סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n .

פרק ב': הנדסת המישור והסתברות (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור שתיים מהשאלות 3 – 6.

מהן מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

הנדסת המישור

3. ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

גובה הטרפז, AH, חותך את

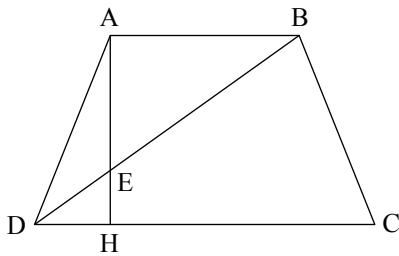
האלכסון BD בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $AD = AB = BC = a$

$CD = 2a$

א. חשב את היחס $\frac{AE}{EH}$. נמק.

ב. הבע באמצעות a את האורך של AE.



4. נתון משולש שווה צלעות ABC.

E היא נקודה על הצלע BC.

על הקטע EC בנו משולש שווה צלעות ECD.

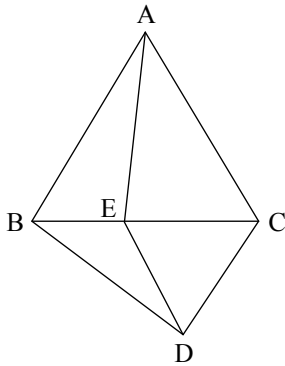
המשך AE חותך את BD בנקודה H (ראה ציור).

הוכח:

א. $\triangle AEC \cong \triangle BDC$

ב. $\angle EAC = \angle HED$

ג. אם $HE = HD$ אז $AE \perp BC$



שימו לב: מותר לענות לכל היותר על אחת מהשאלות 5-6.
נוסחאות בהסתברות נמצאות בעמוד הבא.

הסתברות

5. בכד I יש 6 כדורים שחורים ו-4 כדורים לבנים.
 בכד II יש 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים.
 דנה מוציאה 5 פעמים כדור מכד II באופן הזה: היא מוציאה כדור באקראי ומחזירה אותו לכד, ושוב מוציאה כדור באקראי ומחזירה אותו לכד, וכן הלאה.
 א. מהי ההסתברות שדנה תוציא מכד II כדור שחור בדיוק 3 פעמים?
 דנה זורקת קובייה. אם מתקבל בקובייה מספר קטן מ-2 או שווה ל-2, היא בוחרת בכד I. אם מתקבל בקובייה מספר גדול מ-2 היא בוחרת בכד II.
 מהכד שנבחר דנה מוציאה 5 פעמים כדור באופן שתואר למעלה.
 ב. מהי ההסתברות שדנה תוציא כדור שחור בדיוק 3 פעמים?
 ג. ידוע כי דנה הוציאה כדור שחור בדיוק 3 פעמים.
 מהי ההסתברות שבקובייה התקבל מספר גדול מ-2?

חשיבה הסתברותית בחיי יום יום.

6. בעיר מסויימת 20% מהאופנועים הם ירוקים ו-80% מהאופנועים הם כחולים.
 בתאונת "פגע וברח" שהתרחשה בשעת לילה היא מעורב אופנוע.
 עד ראייה שנכח במקום טען בעדותו שהאופנוע הפוגע היה ירוק.
 במבחנים שנערכו לעד נמצא כי בתנאי הראייה ששררו בזמן התאונה, הוא מזהה נכון את צבע האופנוע ב-75% מהמקרים (כלומר, מבין האופנועים הכחולים הוא מזהה 75% ככחולים, ומבין האופנועים הירוקים הוא מזהה 75% כירוקים).
 א. מצא את היחס בין ההסתברות שהאופנוע הפוגע הוא אכן ירוק כאשר נתונה העדות של עד הראייה, ובין ההסתברות שהאופנוע הוא דווקא כחול כאשר נתונה העדות של עד הראייה.
 ב. מצא את ההסתברות שהאופנוע הפוגע אכן ירוק כאשר נתונה העדות של עד הראייה.
 ג. אילו היחס בין מספר האופנועים הירוקים למספר האופנועים הכחולים בעיר היה גדול מ- $\frac{20}{80}$, האם ההסתברות שטענת העד היא נכונה הייתה גדולה מההסתברות שמצאת בסעיף ב או קטנה ממנה? נמק.

בהצלחה

תשובות:

1. א. $m > 1$

ב. $-3 < m < -1$

2. א. $x = 3$

ב. $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

ג. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$

ד. $S_n = 3^n - 1 + 4n$

3. א. 2

ב. $\frac{a}{\sqrt{3}}$

4. א. הוכחה

ב. הוכחה

ג. הוכחה

5. א. 0.2304

ב. 0.2688

ג. $\frac{4}{7}$

6. א. 0.75

ב. $P = \frac{3}{7}$

ג. גדולה. ככל ש- $P(A)$ גדל גם $P(A/B)$ גדל.

פתרונות מלאים 005:

שאלה 1: $(m^2 - 1)x^2 - 2(m-1)x + 1 > 0$

תנאי 1: $\Delta < 0$

$$4(m-1)^2 - 4(m^2 - 1) < 0$$

$$4(m^2 - 2m) + 1 - 4m^2 + 4 < 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 4 < 0$$

$$-8m + 8 < 0$$

$$8 < 8m$$

$$1 < m$$

תנאי 2: $m^2 - 1 > 0$ פרבולה מחייכת

$$m > 1 \text{ או } m < -1$$

חיתוך שני התנאים:

תשובה סופית ל-א': $m > 1$.

ב. התנאים עבור שני שורשים שליליים:

$$\Delta > 0$$

$$\frac{c}{a} > 0$$

$$\frac{-b}{a} < 0$$

$$\Delta > 0$$

$$4(m-1)^2 - 4(m^2 - 1) \cdot 2 > 0$$

$$4(m^2 - 2m + 1) - 8m^2 + 8 > 0$$

$$4m^2 - 8m + 4 - 8m^2 + 8 > 0$$

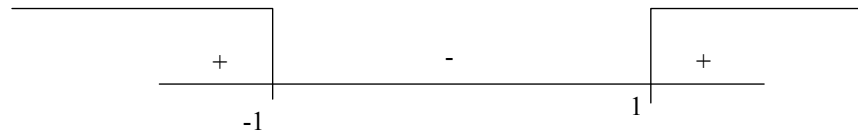
$$-4m^2 - 8m + 12 > 0$$

$$-m^2 - 2m + 3 > 0$$

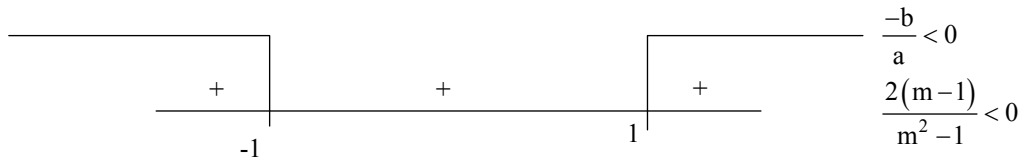
$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2}, \quad m = -3 \quad m = 1$$

תנאי 1: $-3 < m < 1$.

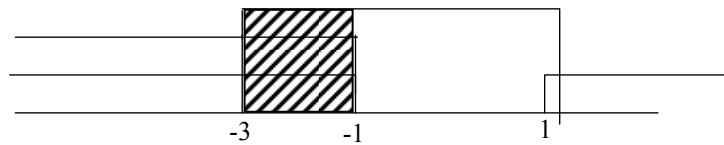
$$\frac{c}{a} > 0 \quad \frac{2}{m^2 - 1} > 0$$



תנאי 2: $m > 1$ או $m < -1$



חיתוך תנאים:



$$\boxed{-3 < m < -1}$$

שאלה 2:

א.

$$\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = x \cdot a_n - 8 \end{cases}$$

זאת סדרה הנדסית: $b_n - 4$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} - 4}{a_n - 4} = 3$$

$$\frac{x \cdot a_n - 8 - 4}{a_n - 4} = 3$$

$$x a_n - 12 = 2a_n - 12$$

$$\boxed{x = 3}$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 8$$

ב.

$$q = 3$$

$$b_1 = a_1 - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$\boxed{b_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$$

$$b_n = a_n - 4$$

ג.

$$2 \cdot 3^{n-1} = a_n - 4$$

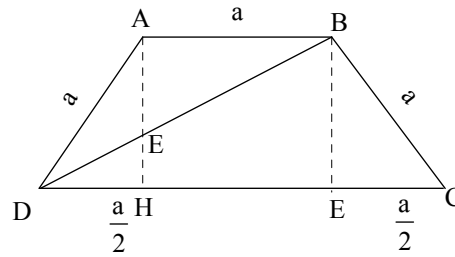
$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4$$

זאת סדרה הנדסית ולכן נשתמש בנוסחה עבור סכום סדרה הנדסית.

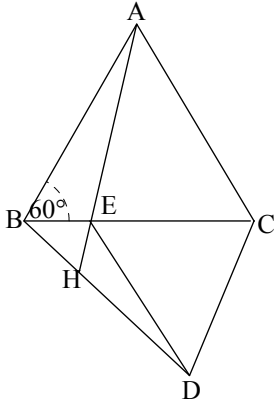
$$S_{b_n} = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{2(3^n - 1)}{2} = 3^n - 1$$

$$S_n = \frac{2(3^n - 1)}{2} + 4n = \boxed{3^n - 1 + 4n}$$

שאלה 3:



נימוק	טענה	
נתון.	ABCD טרפז שווה שוקיים	.1
נתון.	$AD = AB = BC = a$.2
	$CD = 2a$.3
	$DH = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a}{2}$.4
בין ישרים מקבילים זוויות מתחלפות שוות	$\angle BDC = \angle ABD$.5
	$\angle AHD = \angle HAD = 90^\circ$.6
לפי משפט דמיון ז.ז.	$\triangle DEH \sim \triangle BEA$.7
במשולשים דומים היחס בין הצלעות שווה.	מ.ש.ל. א' $\frac{AE}{EH} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$.8
משפט פתגורס.	$AH^2 + DH^2 = AD^2$ $AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ $AH^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$ $AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.9
לפי הנתון בסעיף א'	$AE = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ מ.ש.ל. ב'	.10



נימוק	טענה	
נתון	$AC = BC$	1.
נתון	$EC = DC$	2.
$\triangle ABC$ ו- $\triangle ECD$ הינם משולש שווה צלעות.	$\angle ACB = \angle ECD = 60^\circ$ ↓	3.
לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.	$\triangle AEC \cong \triangle BDC$	4.
	נסמן: $\angle EAC = \alpha$	5.
סכום זוויות במשולש שווה ל- 180°	$\angle AEC = 180 - 60 - \alpha = 120 - \alpha$	6.
במשולשים חופפים זוויות שוות בהתאמה.	$\angle EAC = \angle CBD = \alpha$	7.
זוויות קודקודיות שוות.	$\angle BEH = \angle AEC = 120 - \alpha$	8.
סכום זוויות במשולש שווה ל- 180°	$\angle BHE = 180 - \alpha - 120 + \alpha = 60^\circ$	9.
סכום זוויות צמודות שווה ל- 180°	$\angle EHD = 180 - 60 = 120^\circ$	10.
$\triangle EDC$ שווה צלעות.	$\angle CED = 60^\circ$	11.
זווית שטוחה שווה ל- 180° .	$\angle HED = 180 - 60 - 120 + \alpha = \alpha$	12.
כלל המעבר.	$\angle HED = \angle EAC$	13.
נתון עבור סעיף ג'	$HE = HD$	14.
משולש בו השוקיים שוות הוא מש"ש.	$\triangle HED$ שווה צלעות	15.
זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים שוות.	$\angle HED = \angle HDE = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$	16.
הצבה.	$\angle AEC = 30^\circ$	17.
סכום הזוויות במשולש שווה ל- 180° .	$\angle AEC = 180 - 60 - 30 = 90^\circ$	18.



שאלה 5:

א.

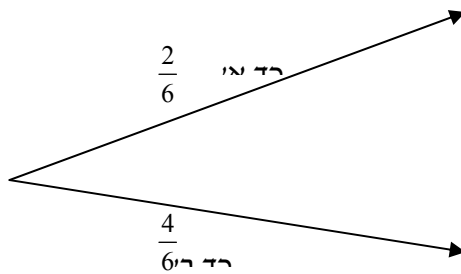
$$n = 5$$

$$k = 3$$

$$P(\text{כדור שחור}) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$P(\text{בדיוק 3 כדורים שחורים מ-5}) = \binom{5}{3} (0.4)^2 (0.6)^2 = 10 \cdot (0.4)^3 (0.6)^2 = 0.2304$$

ב.



$$P(\text{בדיוק 3 שחורים מ-5}) = \frac{2}{6} P(\text{בדיוק שלוש כדורים שחורים מאי א'}) + \frac{4}{6} P(\text{בדיוק 3 שחורים מ-5})$$

$$P(\text{בדיוק שלוש כדורים שחורים}) = \binom{5}{3} (0.6)^3 (0.4)^2 = 0.3456$$

$$\frac{2}{6} \cdot 0.3456 + \frac{4}{6} \cdot 0.2304 = \boxed{0.2688} \quad \text{ב.}$$

$$\text{ג. } P(\text{כדור שחור בדיוק שלוש פעמים/מספר גדול מ-2}) = P(\text{ידוע/מבוקש})$$

$$P(\text{כדור שחור בדיוק שלוש פעמים} \cap \text{מספר גדול מ-2})$$

$$P(\text{כדור שחור בדיוק שלוש פעמים})$$

$$= \frac{\frac{4}{6} \cdot 0.2304}{0.2688} = \frac{4}{7}$$

פתרון שאלה 6 :

A - אופנוע ירוק.

B - קובע שהאופנוע ירוק.

\bar{A} - אופנוע כחול.

\bar{B} - קובע שהאופנוע כחול.

נתון : $P(A) = 0.2$

ולכן $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$

כמו כן נתון : $P(B/A) = P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.75$

ננתח נתונים אלה לפי נוסחת ההסתברות המותנית :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{0.2} = 0.75 \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{0.8} = 0.75 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6$$

נבנה טבלה דו-מימדים :

	\bar{A}	A	
0.35	0.2	0.15	B
0.65	0.6	0.05	\bar{B}
1	0.8	0.2	

$$\frac{P(A/B)}{P(\bar{A}/B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(\bar{A} \cap B)} = \frac{0.15}{0.2} = 0.75 \quad \text{א.}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{3}{7} \quad \text{ב.}$$

ג. גדולה . ככל ש- $P(A)$ גדול גם $P(A/B)$ גדל.