

בגרות לבתי ספר על-יסודיים
מועד הבחינה: תשס"ח,
מספר השאלון: 035006
נספח: דפי נוסחאות ל- 4 ול- 5 יחידות לימוד

מתמטיקה

שאלון ו'

הוראות לנבחן

- א. משך הבחינה: שעה ושלושה רבעים.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.
פרק ראשון - אלגברה - $33\frac{1}{3} \times 1$ - $33\frac{1}{3}$ נקודות.
פרק שני - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה - $33\frac{1}{3} \times 2$ - $66\frac{2}{3}$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
1. מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות עלול לגרום לפסילת הבחינה.
2. דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
1. אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
2. התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
3. לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.
ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.
בהצלחה!

פרק א': אלגברה: (לכל שאלה $\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור אחת מהשאלות 1 – 2.

1. במכירה מיוחדת שנמשכה יומיים מכרו בחנות שני סוגים של מוצרים: מוצר א' ומוצר ב'. במלאי של החנות היו 30 יחידות של מוצר א' ו-28 יחידות של מוצר ב'. ביום הראשון למכירה נמכרו כל 30 היחידות של מוצר א'. ביום זה סך כל סכום הכסף מהמכירה של מוצר ב' היה נמוך ב-20% מסך כל סכום הכסף מהמכירה של מוצר א'. ביום השני למכירה נמכרו כל היחידות של מוצר ב' שנשארו בחנות, ומספרן היה גדול ב- $\frac{1}{3}$ ממספר היחידות של מוצר זה שנמכרו ביום הראשון. ידוע כי במכירה המיוחדת מספר ביחידות של מוצר א' שאפשר היה לקנות ב-120 שקל, היה גדול ב-10 יחידות ממספר היחידות של מוצר ב' שאפשר היה לקנות באותו סכום. מצא את המחיר ליחידה של מוצר א', ואת המחיר ליחידה של מוצר ב' במכירה המיוחדת.

2. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הנוסחה:

$$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2$$

א. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים האי שוויון:

$$a_2 - a_3 + a_4 - \dots + a_{2n} = 1 + 3^{2n}$$

ב. השתמש באי שוויון שבסעיף א' וחשב את הסכום:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{13}$$

פרק ב': חשבון דיפרנציאלי (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות).

פתור שתיים מהשאלות 3 – 5.

3. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(3) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

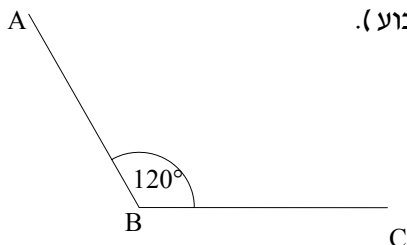
(4) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

ב. על פי תשובותיך לסעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי הישר $y = \sqrt{3}$ ועל ידי הצירים

מסתובב סביב ציר ה- x .

הבע באמצעות a את הנפח של גוף הסיבוב שמתקבל.



4. נתון כי במרחק בין יישוב A ליישוב B הוא d ק"מ (d הוא קבוע).

רוכב האופניים יצא בשעה מסוימת מיישוב A ליישוב B,

ורכב במהירות קבועה של 10 קמ"ש.

באותה שעה יצא מיישוב B רוכב אופניים שני

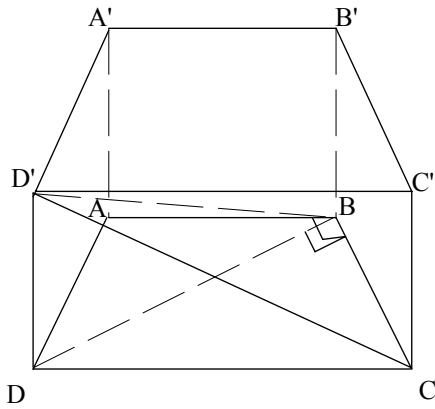
שרכב ליישוב C במהירות קבועה של 12 קמ"ש.

נתון כי הזווית ABC היא 120° (ראה ציור).

ידוע כי המרחק בין הרוכבים יהיה מינימלי כעבור 2.5 שעות לרכיבתם (לפני שהרוכב מ-A

יגיע ל-B).

מצא את המרחק שבין יישוב A ליישוב B.



5. הבסיס של מנסרה ישרה $ABCDA'B'C'D'$ הוא טרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($AB \parallel CD$)

(ראה ציור).

נתון:

הזווית בין האלכסון $D'B'$ ובין

האלכסון $D'C$ היא α ,

$$\angle DBC = 90^\circ$$

$$\angle D'BC = 90^\circ$$

$$\angle DCB = 60^\circ$$

א. הבע באמצעות α ו- a את גובה המנסרה.

ב. הבע באמצעות α את טנגנס הזווית שבין $D'BC$ למישור הבסיס $ABCD$.

בהצלחה

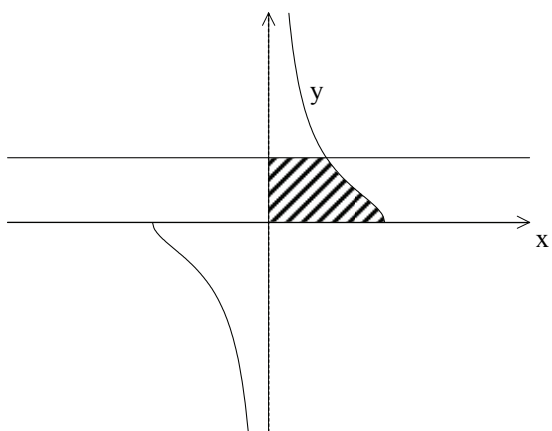
תשובות:

1. $x = 6$

$y = 12$

2. א. הוכחה

ב. 1,594,322



3. א. ב.

(1) $-a \leq x < 0$, $0 < x \leq a$

(2) אין נקודת חיתוך עם ציר ה-y.

$(a, 0)$ $(-a, 0)$

(3) אסימפטוטה אנכית: $x = 0$

אין אסימפטוטה אופקית.

(4) הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. $2\pi a$

4. א. $d = 77.5$

5. אפשרות א:

א.
$$h = \frac{a \cdot \sqrt{1 - 3\text{tg}^2 \alpha}}{\text{tg} \alpha}$$

ב.
$$\frac{1}{\sqrt{3}\text{tg} \alpha} \cdot \sqrt{1 - 3\text{tg}^2 \alpha}$$

אפשרות ב':

א.
$$\frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}$$

ב.
$$\frac{\sqrt{1 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{3} \sin \alpha}$$

פתרונות מלאים :

.1

מחיר ליחידה של מוצר א' x .מחיר ליחידה של מוצר ב' y .

רווח	מחיר	כמות	
$30x$	x	30	יום I: מוצר א' מוצר ב'
$12y$	y	$u = 12$	
120	x	$\frac{120}{x}$	מוצר א'
120	y	$\frac{120}{y}$	מוצר ב'

מוצר ב' :

מספר היחידות שנמכרו ביום הראשון u מספר היחידות שנמכרו ביום השני $1\frac{1}{3}u$

$$u + 1\frac{1}{3}u = 28$$

$$2\frac{1}{3}u = 28$$

$$u = 12$$

$$12y = \overset{1-20\%}{0.8} \cdot 30x \quad (1) \quad \text{נתון לגבי רווח ביום I} :$$

$$\Downarrow$$

$$12y = 24x \Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{y} + 10 \quad (2) \quad \text{נתון לגבי 120 שקל} :$$

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{2x} + 10 = \frac{60}{x} + 10 \quad \cdot x$$

$$120 = 60 + 10x \Rightarrow 10x = 60 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

$$\boxed{y = 12}$$

שאלה 2:

$$a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2 \quad \text{א.}$$

$$a_2 - a_3 + a_4 - \dots + a_{2n} = 1 + 3^{2n}$$

$$a_3 = 4 \cdot 3^2 - 2 = 34$$

$$10 - 34 + \dots + 4 \cdot 3^{2n-1} - 2 = 1 + 3^{2n}$$

בדיקה עבור $n = 1$:

$$\begin{array}{ccc} 4 \cdot 3 - 2 & 4 \cdot 3 - 2 = 1 + 3^2 & \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ 10 & 10 & 10 \end{array}$$

נניח שהביטוי מתקיים עבור $n = k$:

$$10 - 34 + \dots + 4 \cdot 3^{2k-1} - 2 = 1 + 3^{2k}$$

נניח שהביטוי מתקיים עבור $n = k + 1$:

$$10 - 34 + \dots + (4 \cdot 3^{2k} - 2) - (4 \cdot 3^{2k+1} - 2) = 1 + 3^{2k+2}$$

$$\underbrace{10 - 34 + \dots + (4 \cdot 3^{2k} - 2)}_{\Downarrow} - (4 \cdot 3^{2k+1} - 2) = 1 + 3^{2k+2}$$

$$1 + 3^{2k} - 4 \cdot 3^{2k} + \cancel{2} + 4 \cdot 3^{2k+1} - \cancel{2} = 1 + 3^{2k+2}$$

$$1 + 3^{2k} - 4 \cdot 3^{2k} + 12 \cdot 3^{2k} = 1 + 3^{2k+2}$$

$$1 + 3^{2k+2} = 1 + 3^{2k+2}$$

ולכן על סמך אקסיומת האינדוקציה הטענה נכונה עבור n טבעי.

$$a_1 - a_2 + a_3 + \dots + a_{13} \quad \text{ב.}$$

$$S_n = a_1 - (a_2 - a_3 + a_4 - \dots - a_{13})$$

$$a_1 = 2 \quad a_{14} = 4 \cdot 3^{13} - 2$$

$$a_2 - a_3 + a_4 \dots - a_{13} + a_{14} = 1 + 3^{2 \cdot 7}$$

$$2n - 1 = 13$$

$$2n = 14 \quad /: 2$$

$$n = 7$$

$$a_2 - a_3 + a_4 \dots - a_{13} = 1 + 3^{14} - a_{14}$$

נציב את הביטוי בסכום:

$$2 - (1 + 3^{14} - 4 \cdot 3^{13} + 2) =$$

$$2 - 1 - 3^{14} + 4 \cdot 3^{13} - 2 =$$

$$4 \cdot 3^{13} - 3^{14} - 1 = 1,594,322$$

3.

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad a > 0$$

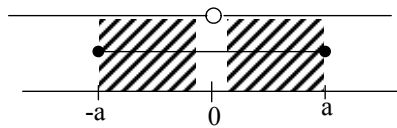
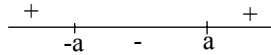
$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad x \neq 0$$

$$x^2 - a^2 \leq 0$$

$$x^2 = a^2$$

$$x = \pm a$$

א.



$$\boxed{-a \leq x < 0 \quad 0 < x \leq a}$$

2. אין נקודות קיצון עם ציר ה-y $\Rightarrow x = 0$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} : \text{נקודת חיתוך עם ציר } x$$

$$(\sqrt{a^2 - x^2})^2 = 0^2$$

$$a^2 - x^2 = 0$$

$$a^2 = x^2$$

$$x = \pm a$$

$$(a, 0) \quad (-a, 0)$$

3. אסימפטוטה אנכית: $x = 0$

אין אסימפטוטה אופקית.

$$f'(x) = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot x - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} = 0 \quad .4$$

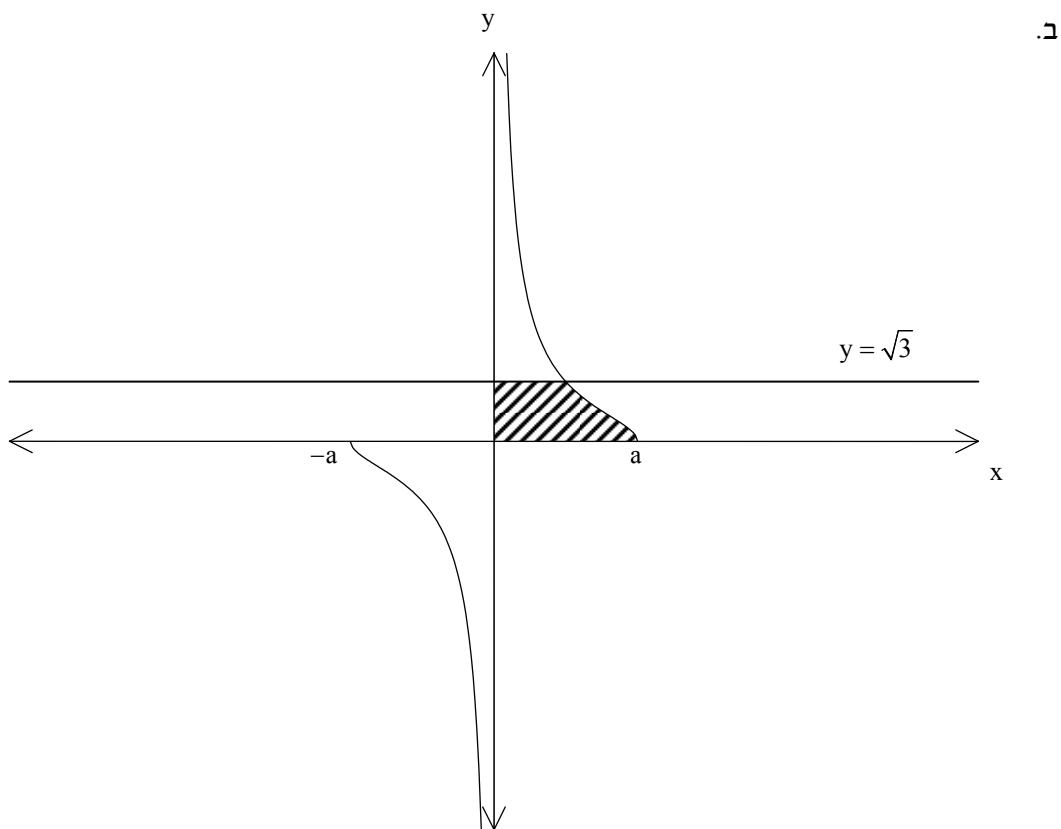
$$\frac{-2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \quad / \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$-x^2 - (a^2 - x^2) = 0$$

$$-x^2 - a^2 + x^2 = 0 \quad \text{אין נקודות קיצון}$$

$$f'(x) = \frac{-a^2}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

הנגזרת שלילית לכל x ולכן הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.



$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$(\sqrt{3}x)^2 = (\sqrt{a^2 - x^2})^2$$

$$3x^2 = a^2 - x^2$$

$$4x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x = \frac{a}{2} \quad x = -\frac{a}{2}$$

ג

$$\pi \int_0^{\frac{a}{2}} (\sqrt{3})^2 dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right)^2 dx$$

$$\pi 3x \Big|_0^{\frac{a}{2}} + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{a^2 - x^2}{x^2} dx =$$

$$\pi 3 \cdot \frac{a}{2} + \pi \int_{\frac{a}{2}}^a \frac{a^2}{x^2} - 1 dx =$$

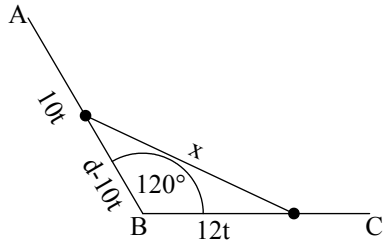
$$\frac{3\pi a}{2} + \pi \cdot \frac{a^2 \cdot x^{-2+1}}{-2+1} - x \Big|_{\frac{a}{2}}^a$$

$$\frac{3\pi a}{2} + \pi \cdot \frac{-a^2}{x} - x \Big|_{\frac{a}{2}}^a =$$

$$\frac{3\pi a}{2} + \pi((-a - a) - \left(\frac{-a^2}{\frac{a}{2}} - \frac{a}{2} \right))$$

$$\frac{3\pi a}{2} + \pi \left(-2a + 2a + \frac{a}{2} \right) =$$

$$\frac{3\pi a}{2} + \frac{\pi a}{2} = 2\pi a$$



מרחק מינימלי בין הכוכבים :

$$x^2 = (d-10t)^2 + (12t)^2 - 2 \cdot t \cdot (d-10t) \cos 120$$

$$x^2 = d^2 - 20dt + 100t^2 + 144t^2 + 12dt - 120t^2$$

$$x^2 = d^2 - 8dt + 124t^2$$

$$x = \sqrt{d^2 - 8dt + 124t^2}$$

$$x' = \frac{-8d + 248t}{2\sqrt{d^2 - 8dt + 124t^2}} = 0$$

$$-8d + 248t = 0$$

$$-d + 31t = 0$$

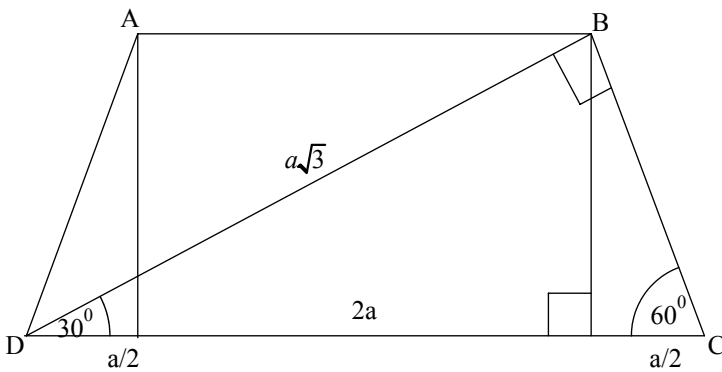
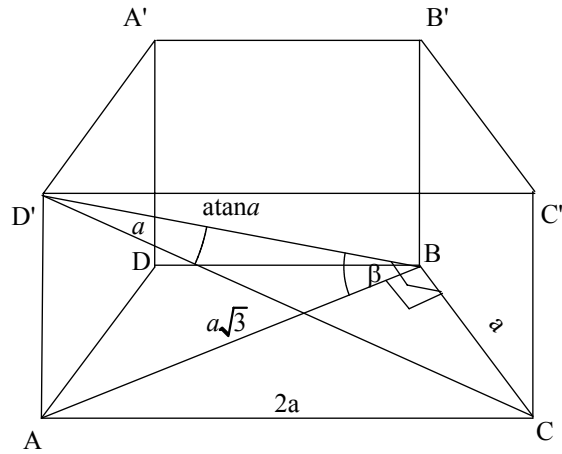
$$31t = d$$

$$t = \frac{d}{31}$$

ולכן מינימום $x'' = 248 > 0 \Rightarrow$

ידוע שה- t המינימלי הינו 2.5 ולכן נקבל $2.5 = \frac{d}{31}$

$$\boxed{d = 77.5}$$



$\triangle DBC$:

$$\angle BDC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

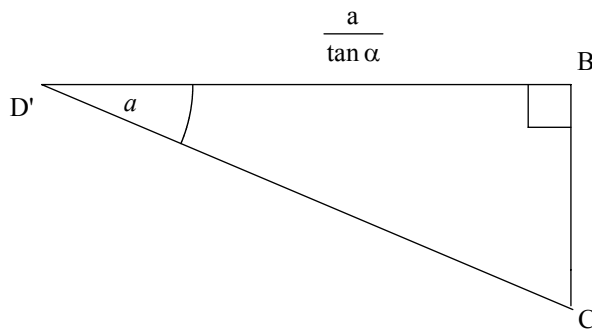
$$\sin 30^\circ = \frac{a}{DC}$$

$$DC = \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$$

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$$

$$BD = \sqrt{3}a$$

$\triangle D'BC$: .N

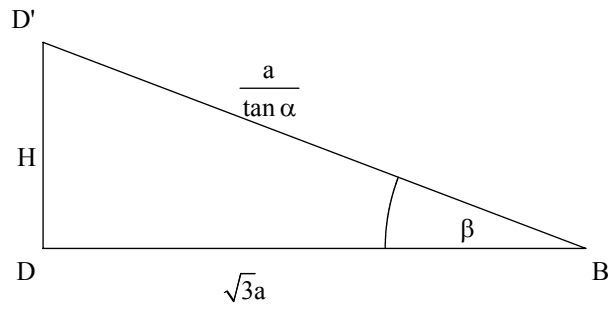


$$\tan \alpha = \frac{a}{D'B} \Rightarrow D'B = \frac{a}{\tan \alpha}$$

$$H^2 = D'D^2 = \frac{a^2}{\tan^2 \alpha} - 3a^2 =$$

$$H^2 = \frac{a^2}{\tan^2 \alpha} (1 - 3 \tan^2 \alpha)$$

$$H = \frac{a}{\tan \alpha} \sqrt{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$



$$\tan \beta = \frac{H}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3} \tan \alpha} \sqrt{1 - 3 \tan^2 \alpha} = \tan \beta \quad \text{ב.}$$