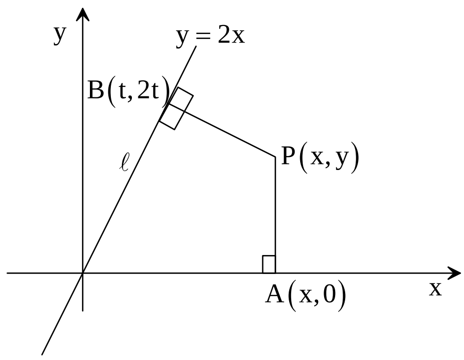
פתרונות שאלון 007 קיץ 2007 מועד א

.1

א.



נסמן $P(x,y)$ ואז $A(x,0)$.
כמו כן נסמן את הנקודה B ב- $B(t,2t)$
כי היא על הישר ℓ.

נמצא משוואה המקשרת בין x ל- y:
שיפוע הישר ℓ הוא 2 ולכן שיפוע BP הוא $-\frac{1}{2}$
(כי PB מאונך ל- ℓ).
כלומר:

$$(1)\quad \frac{y-2t}{x-t}=-\frac{1}{2}$$

נתון המרחק בין A ל-B הוא 8 ולכן:

$$(2)\quad d_{AB}=\sqrt{(x-t)^2+(0-2t)^2}=8$$

נחלץ את t מהמשוואה 1:

$$2(y-2t)=-(x-t)$$
$$2y-4t=-x+t$$
$$5t=2y+x$$
$$t=\frac{2y+x}{5}$$

משוואה 2 תיתן:

$$\sqrt{(x-t)^2+4t^2}=8 \quad /(\ )^2$$
$$(x-t)^2+4t^2=64$$
$$x^2-2tx+t^2+4t^2=64$$
$$x^2-2tx+5t^2=64$$

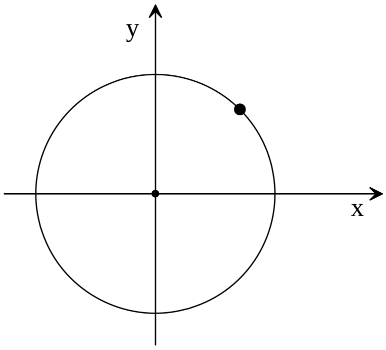
אבל $t=\frac{x+2y}{5}$ נציב ב-2 ונקבל:

$$x^2-2\cdot\frac{(x+2y)}{5}\cdot x+5\cdot\left(\frac{x+2y}{5}\right)^2=64$$
$$x^2-\frac{2x(x+2y)}{5}+\frac{5(x+2y)^2}{25}=64$$
$$x^2-\frac{2x(x+2y)}{5}+\frac{(x+2y)^2}{5}=64 \quad /\cdot 5$$
$$5x^2-2x(x+2y)+(x+2y)^2=320$$
$$5x^2-2x^2-4xy+x^2+4xy+4y^2=320$$
$$4x^2+4y^2=320 \quad /:4$$
$$x^2+y^2=80$$

המקום הגיאומטרי הוא מעגל שמרכזו $(0,0)$ ורדיוסו $\sqrt{80}$.

ב.

אם הנקודה נמצאת במרחק שווה מציר x ומציר y אז $|x|$ של הנקודה שווה ל- $|y|$ של הנקודה.



כלומר: $|x|=|y| \quad /(\ )^2$

$x^2=y^2$

נציב זאת במשוואת המעגל ונקבל:

$x^2+x^2=80$

$2x^2=80$

$x^2=40$

$x=\pm\sqrt{40}$

אם $x=\sqrt{40}$ אז $y=\pm\sqrt{40}$

אם $x=-\sqrt{40}$ אז $y=\pm\sqrt{40}$

כלומר 4 הנקודות הן: $\left(-\sqrt{40},-\sqrt{40}\right)$, $\left(-\sqrt{40},\sqrt{40}\right)$, $\left(\sqrt{40},-\sqrt{40}\right)$, $\left(\sqrt{40},\sqrt{40}\right)$.

2.

א.

נסמן: $\vec{BH}=\underline{u}$, $\vec{EH}=\underline{v}$, $\vec{AH}=\underline{w}$

נתון כי $\vec{AH}$ הוא גובה לבסיס הפירמידה.

כלומר $\vec{AH}$ מאונך ל- $\vec{TH}$ ול- $\vec{BH}$ (ישר מאונך למישור מאונך לכל הישרים במישור העוברים דרך עקבו).

כלומר: $\underline{w}\cdot\underline{v}=0$ ו- $\underline{w}\cdot\underline{u}=0$.

נמצא את $\vec{TA}$: $\vec{TA}=\vec{TH}+\vec{HA}=\underline{v}-\underline{w}$

נתון גם כי $\vec{BT}\perp\vec{TA}$.

$\vec{BT}=\vec{BH}+\vec{HT}=\underline{u}-\underline{v}$

ולכן, $\vec{TA}\cdot\vec{BT}=0$

כלומר: $(\underline{v}-\underline{w})(\underline{u}-\underline{v})=0$

$\underline{u}\underline{v}-\underline{v}^2-\underline{w}\underline{u}+\underline{w}\underline{v}=0$

$\underline{u}\underline{v}-\underline{v}^2=0$

כעת נוכיח כי: $\vec{EA}\cdot\vec{TH}=\vec{TA}\cdot\vec{BH}$

עלינו להוכיח כי: $(\underline{v}-\underline{w})\underline{v}=(\underline{v}-\underline{w})\underline{u}$

נפתח סוגריים ונכנס איברים דומים

$\underline{v}^2-\underline{v}\underline{w}=\underline{v}\underline{u}-\underline{w}\underline{u}$

$\underline{u}\underline{v}-\underline{v}^2-\underline{w}\underline{u}+\underline{w}\underline{v}=0$

$\underline{u}\underline{v}-\underline{v}^2=0$

והוכחנו זאת.

ב.

צ"ל: $\vec{HT}\cdot\vec{BT}=0$ או צ"ל $-\underline{v}(\underline{u}-\underline{v})=0$

הוכחנו כבר ש: $\underline{u}\underline{v}-\underline{v}^2-\underline{w}\underline{u}+\underline{w}\underline{v}=0$

כמו כן: $\underline{w}\underline{u}=\underline{w}\underline{v}=0$

ולכן, $\underline{u}\underline{v}-\underline{v}^2=0$

$\underline{v}(\underline{u}-\underline{v})=0$

מ.ש.ל

.3

.א

נמצא הצגה פרמטרית למישור:

הצגה פרמטרית אפשרית היא: $(3,-1,4)+t(2,1,-1)+s(0,5,-3)$

וקטור כיוון זה התקבל מחיסור 2 נק׳ במישור. $(3,-1,4)$ ו- $(3,4,1)$

כדי להפוך למשוואה נבצע מכפלה ווקטורית למציאת מקדמי a, b ו-c של המישור

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$a=-3+5=2$

$b=-(-6-0)=6$

$c=10-0=10$

נחלק ב-2 ונקבל: $a=1$, $b=3$, $c=5$.

$x+3y+5z+d=0$

נציב את $(3,-1,4)$ ונקבל:

$3-3+20+d=0$

$d=-20$

כלומר משוואת המישור תהיה: $x+3y+5z-20=0$

.ב

.1

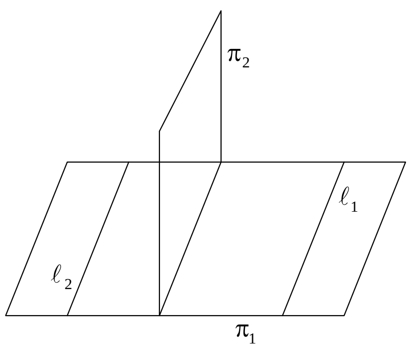
אם π_2 מקביל ל- ℓ_1 ו- ℓ_2 אז ווקטור הכיוון שלהם נמצא ב- π_2.

כמו כן היות ו- $\pi_2 \perp \pi_1$ אז ווקטור שמאונך ל- π_1 נמצא ב- π_2.

עפ״י 2 ווקטורי כיוון ב- π_2 נמצא את ע״י מכפלה ווקטורית המאונך למישור π_2.

ווקטור הכיוון של ℓ_1 הוא $(2,1,-1)$

ווקטור המאונך ל- π_1 הוא $(1,3,5)$



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$a=5+3=8$

$b=-(10+1)=-11$

$c=6-1=5$

ולכן ווקטור המאונך ל- π_2 הוא $(8,-11,5)$

.2

אם π_2 נמצא במרחקים שווים מ- ℓ_1 ו- ℓ_2 אז מרחק הנקודה $(3,-1,4)$ מ- π_2 שווה למרחק הנקודה $(3,4,1)$ מ- π_2.

משוואת π_2 : $8x-11y+5z+d=0$.

נשווה בין המרחקים

$$\frac{|24+11+20+d|}{\sqrt{8^2+11^2+5^2}}=\frac{|24-44+5+d|}{\sqrt{8^2+11^2+5^2}}$$

$$|d+55|=|d-15|$$

$d+55=-(d-15)$ או $d+55=d-15$

$d+55=-d+15$

$2d=-40$

$d=-20$

משוואת המישור π_2 : $8x-11y+5z-20=0$

.4

$$a_3 = 5+3i$$
$$a_6 = 3+5i$$

.א

$$q = \frac{a_6}{a_3} = \frac{3+5i}{-5+3i}\cdot\frac{-5-3i}{-5-3i} = \frac{-15-9i-25i-15i^2}{25-9i^2} = \frac{\cancel{-15}-34i+\cancel{15}}{25+9} = \frac{-34i}{34} = -i$$

$$a_{15} = a_3\cdot q^4 = (-5+3i)(-i)^4 = (-5+3i)\underbrace{\left((-i)^2\right)^2}_{1} = -5+3i$$

ולכן: $a_{15} = a_3$

.ב

$$q^3 = -i$$
$$q = \sqrt[3]{-i}$$
$$q_1 = 1cis90$$
$$q_2 = 1cis210$$
$$q_3 = 1cis330$$

.ג

לכל אחד מה- q -ים שמצאנו $R=1$.

נוכיח כי בסדרה לכל שני איברים סמוכים יש את אותו γ.

אם $a_n = \gamma cis\theta$

$$a_{n+1} = a_n\cdot 1cis\alpha = \gamma cis\theta\cdot 1cis\alpha$$

כלומר: $a_{n+1} = \gamma cis(\theta+\alpha)$

כלומר ל- a_n ול- a_{n+1} יש את אותו R.

מ.ש.ל.

.5

.א

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}=$$

$$=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{e^{2x}+2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}>0$$

לכן הפונקציה עולה לכל x.

.ב

אסימפטוטה אנכית:

$$e^x+e^{-x}=0$$

נגדיר: $e^x=t$

$$e^{-x}=\frac{1}{t}$$

$$t+\frac{1}{t}=0$$

$$t^2+1=0$$

$$t^2=-1\ \varnothing$$

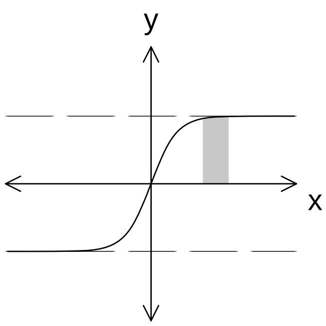
אין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה אופקית:

$$\ell nx\to+\infty\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$$

$$\ell nx\to-\infty\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-1$$

.ג



$$\int_a^{\ell n2}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\ell n4-\ell n3$$

אינטגרל בהצבה $e^x+e^{-x}=t$

$$(e^x-e^{-x})dx=dt$$

$$dx=\frac{dt}{e^x-e^{-x}}$$

$$\int\frac{e^x-e^{-x}}{t}\cdot\frac{dt}{e^x-e^{-x}}=\ell nt=\ell n(e^x+e^{-x})$$

$$\int_{\ln 2}^{a}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\ell n4-\ell n3=\ell n(e^x+e^{-x})\Big|_{\ell n2}^{a}=\ell n4-\ell n3$$

$$\int_{\ell n2}^{a} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$e^x + e^{-x} = t$$

$$\left(e^x - e^{-x}\right) dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{e^x - e^{-x}}$$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{t} \cdot \frac{dt}{e^x - e^{-x}} = \int \frac{1}{t} dt = \ell nt \Big|_{\ell n2}^{a} = \ell n\left(e^x + e^{-x}\right) \Big|_{\ell n2}^{a} =$$

$$= \ell n\left(e^a + e^{-a}\right) - \left(\ell n\left(e^{\ell n2} + e^{-\ell n2}\right)\right) = \ell n\left(e^a + e^{-a}\right) - \ell n\left(2 + 2^{-1}\right) =$$

$$= \ell n\left(e^a + e^{-a}\right) - \ell n2\frac{1}{2}$$

$$= \ell n \frac{e^a + e^{-a}}{2\frac{1}{2}} = \ell n \frac{4}{3}$$

$$e^a + e^{-a} = \frac{10}{3}$$

$$e^a + \frac{1}{e^a} = \frac{10}{3}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \quad / \cdot 3t$$

$$3t^2 + 3 = 10t \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 10t + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{10 \pm 8}{6} \langle \begin{matrix} 3 \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

$t = \frac{1}{3}$ או $t = 3$

כלומר: $e^a = \frac{1}{3}$ או $e^a = 3$

ולכן: $a = \ell n3$.

שיטה נוספת למציאת אינטגרל נשתמש בקשר הבא: $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ell n(u(x)) + c$.

$$\begin{matrix} u(x) = e^x + e^{-x} \\ u'(x) = e^x - e^{-x} \end{matrix} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ell n(e^x + e^{-x})$$